Libros de Cátedra

Matemática en arquitectura - Parte 1

Un aporte para la formación en matemática de los estudiantes de la carrera de arquitectura

Stella Maris Arrarás, Julio Marañón Di Leo y Viviana Cappello (coordinadores)

FACULTAD DE
ARQUITECTURA Y URBANISMO

e
exactas





MATEMÁTICA EN ARQUITECTURA

PARTE 1

UN APORTE PARA LA FORMACIÓN EN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES DE LA CARRERA DE ARQUITECTURA

Stella Maris Arrarás
Julio Marañón Di Leo
Viviana Cappello
(coordinadores)

Facultad de Arquitectura y Urbanismo







A todos los alumnos que idean obras arquitectónicas, haciéndolas bellas y, sobre todo, sólidas.

Agradecimientos

En el aporte continuo de quienes nos dedicamos a la docencia con ferviente vocación se evidencia la tarea de contribuir en el mejoramiento de poder abordar a la matemática con mayor soltura. No verla como esa disciplina inalcanzable e inentendible, sino aprovechar de todas las herramientas que brinda, para lograr resolver las situaciones reales que se presentan en la vida cotidiana. Esa tarea fue la que nos propusimos realizar y la que no nos resultó simple. Pero el anhelo de poder brindar un texto que haga accesible los temas que nuestros alumnos necesitan para complementar su magnífica creatividad en el diseño y la arquitectura, nos mantuvo intactos en el objetivo propuesto.

En los capítulos de este libro, encontrarán años de experiencia y exposición de temas, sin quitarle la rigurosidad del caso haciéndolos significativos

Deseamos manifestar un profundo agradecimiento a ellos que son los principales actores de este libro y a quienes va dirigido.

Al grupo de docentes que conforma la cátedra de matemática.

A todos los docentes que pasaron por esta cátedra, en todas sus versiones, modalidades y apellidos, dejándonos la impronta del ejemplo de docencia y el modelo a seguir.

A nuestras familias, fieles compañeros.

Muchas gracias a todos.

“La arquitectura es el arte que determina la identidad de nuestro tiempo y mejora la vida de las personas”.

SANTIAGO CALATRAVA.

Índice

CAPÍTULO 1
Conjuntos numéricos. Geometría Elemental. Trigonometría

Giulietti, Marcelo F. y Trifilio, Mariano M.

Conjuntos numéricos

Los distintos conjuntos numéricos pueden relacionarse a través del siguiente diagrama:

NATURALES (N)
CERO
N_0
ENTEROS (Z)
NEGATIVOS
RACIONALES (Q)
FRACCIONARIOS
REALES (R)
IRRACIONALES (I)

En el conjunto R puede establecerse una correspondencia biunívoca con los puntos de la recta numérica; esta correspondencia establece que a cada punto de la recta le corresponde un único número real y recíprocamente. Se puede decir que el conjunto de los números reales "cubre" la recta numérica.

Concepto de intervalo - Operaciones

Los intervalos son subconjuntos de R que se pueden representar gráficamente en la recta numérica.

Intervalos finitos

Definición: Dados dos números reales a y b, llamamos intervalo de extremos a y b al conjunto formado por todos aquellos números reales comprendidos entre a y b.

Si los extremos pertenecen o no al intervalo se distinguen:

a) **Intervalo cerrado**: Es aquel al cual pertenecen sus extremos.

Simbólicamente: $[a, b] = \{x/x \in R \wedge a \leq x \leq b\}$

Su representación gráfica es:



b**) Intervalo abierto**: Idéntico al anterior, pero a este no pertenecen los extremos.

Simbólicamente: $(a, b) = \{x/x \in R \wedge a < x < b\}$

Su representación gráfica es:

a b

c) **Intervalos semiabiertos o semicerrados:** Contienen solo uno de sus extremos.

c_1) Abierto por izquierda y cerrado por derecha:

Simbólicamente: $(a, b] = \{x/x \in R \wedge a < x \leq b\}$

Su representación gráfica es:

a b

c_2) Cerrado por izquierda y abierto por derecha:

Simbólicamente: $[a, b) = \{x/x \in R \wedge a \leq x < b\}$

Su representación gráfica es:



Intervalos infinitos

- Dado el intervalo $(-\infty, a]$, al mismo pertenecen todos los números reales menores o iguales que a.

$(-\infty, a] = \{x / x \in R \ \wedge \ x \leq a\}$

$-\infty$ se lee "menos infinito" y no simboliza un número real.

Su representación gráfica es:



- Dado el intervalo $(-\infty, a)$, al mismo pertenecen todos los números reales menores que a.

$(-\infty, a) = \{x / x \in R \ \wedge \ x < a\}$

Su representación gráfica es:

$-\infty$ a

- Dado el intervalo $[a, \infty)$, al mismo pertenecen todos los números reales mayores o iguales que a.

$[a, \infty) = \{x / x \in R \ \wedge \ x \geq a\}$

Su representación gráfica es:



- Dado el intervalo (a, ∞), al mismo pertenecen todos los números reales mayores que a.

$(a, \infty) = \{x / x \in R \ \wedge \ x > a\}$

Su representación gráfica es:



La notación de intervalo permite utilizar una nueva simbología para el conjunto de los números reales.

$$R = (-\infty, +\infty)$$

Actividad

1. Expresar en notación de intervalos y representar en la recta numérica.

1.1 $A = \{x / x \in R \wedge -1 \leq x < 2\}$

1.2 $B = \{x / x \in R \wedge 0 < x \leq 5\}$

1.3 $C = \{x / x \in R \wedge x > 5\}$

2. Representar en la Recta Numérica:

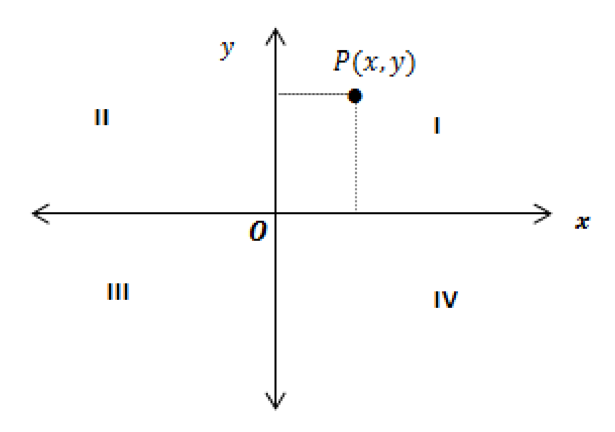
2.1 $A = \{x / x \in R \wedge x^2 - 1 = 0\}$

2.2 $B = \{x / x \in R \wedge x^3 = 4x\}$

Sistemas de representación en el plano

Coordenadas cartesianas ortogonales

Del mismo modo que tenemos una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números reales y los puntos de la recta numérica, extendiendo la idea al espacio de dos dimensiones (el plano) podemos establecer una correspondencia entre sus puntos y los pares ordenados de números reales (x, y). Para ello utilizamos el llamado Sistema de Coordenadas Cartesianas Ortogonales (debido a Descartes, siglo XVII), constituido por un par de ejes orientados perpendiculares entre sí.

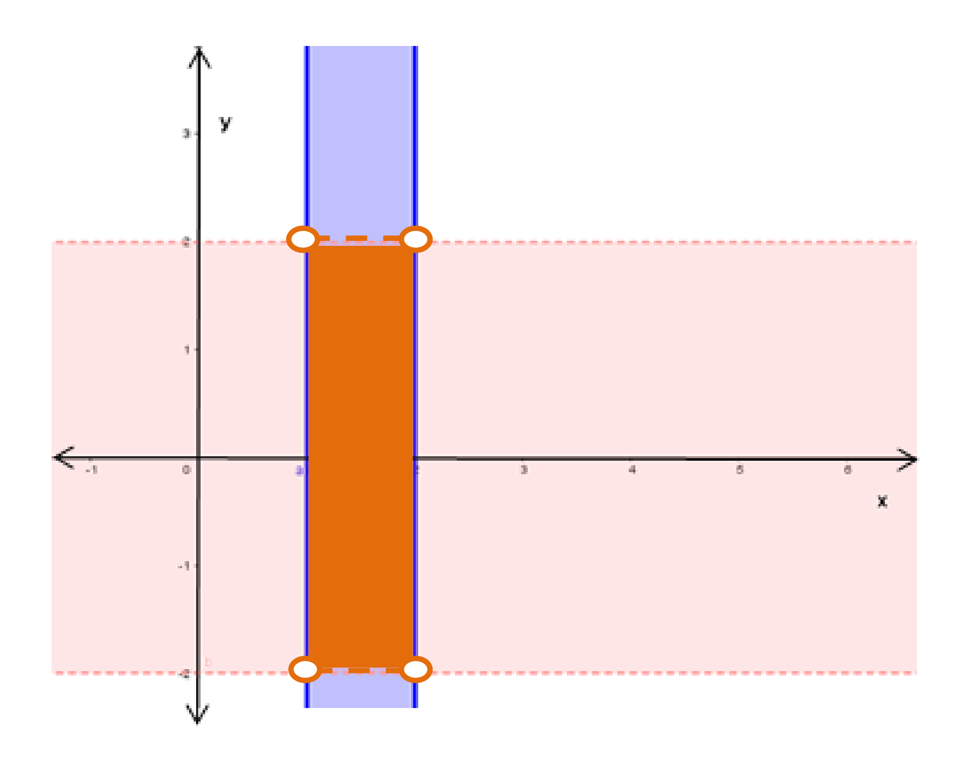


El plano queda dividido en cuatro cuadrantes cuyos límites son los ejes coordenados utilizándose para ambos ejes en general, la misma unidad de medida.

El eje horizontal "x" se denomina eje de abscisas y el eje vertical "y" eje de ordenadas.

El punto O, intersección entre los ejes coordenados, se llama origen de coordenadas.

Ejemplo: Representar en el plano el conjunto $C = \{(x, y)/1 \leq x \leq 2 \wedge -2 < y < 2\}$



Actividad

3. Representar en el plano:

3.1 $A = \{(x, y)/1 \leq x < 3 \wedge 2 < y \leq 4\}$

3.2 $B = \{(x, y)/2 < x \leq 3 \wedge y^2 - 1 = 0\}$

Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una expresión de la forma: $ax + by = c$, donde a, b y c son valores numéricos (coeficientes) y las incógnitas son x e y. Gráficamente representa una recta en el plano.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas será de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Resolver el sistema implica hallar los valores de las incógnitas que satisfacen ambas ecuaciones. El conjunto de pares (x, y) que satisfacen simultáneamente las dos ecuaciones se denomina conjunto solución del sistema.

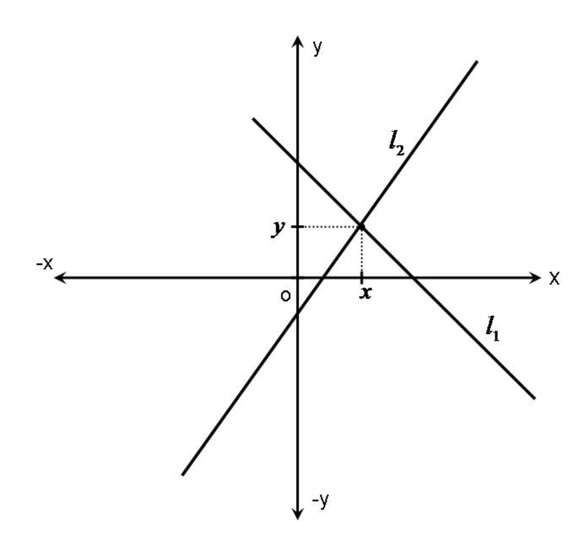
Su representación en el plano son dos rectas.

En este tipo de sistema de ecuaciones se pueden presentar los siguientes casos:

1- Sistema compatible: el sistema admite solución.

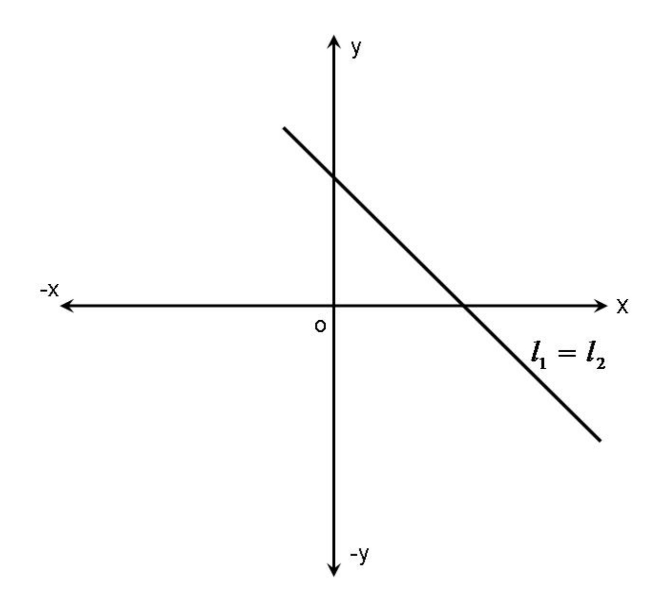
a) **Sistema compatible determinado**: El sistema tiene única solución.

La representación gráfica consta de dos rectas que se cortan en un punto; los valores de x e y de este punto son la solución del sistema.

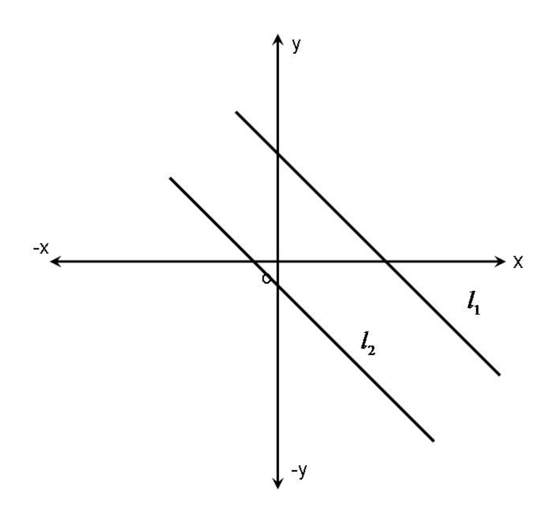


b) **Sistema compatible indeterminado:** el sistema admite infinitas soluciones.

La representación gráfica son dos rectas coincidentes. Cualquier punto de las recta es solución del sistema.



2- **Sistema incompatible:** el sistema no admite solución. En este caso, su representación gráfica son dos rectas paralelas.



Métodos analíticos de resolución de sistemas de ecuaciones

Para la resolución analítica de un sistema de ecuaciones lineales pueden utilizarse distintos métodos

A. Método de sustitución: este método consiste en:

1. Despejar una incógnita en una de las ecuaciones.
2. Sustituir en la otra ecuación la incógnita despejada.
3. Resolver la ecuación resultante, que es de primer grado y obtener el valor de una de las incógnitas.
4. Sustituir el valor obtenido en la ecuación despejada en el paso 1 y resolver.
5. Verificar los resultados obtenidos

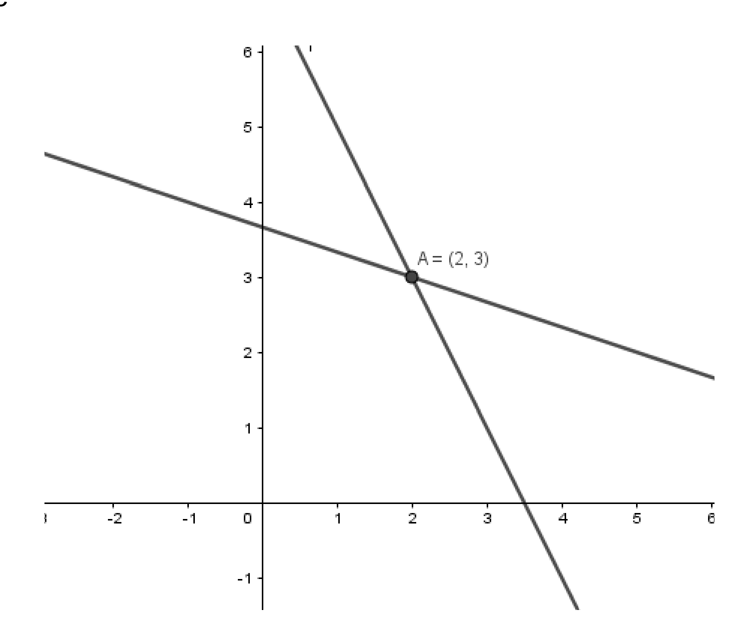
Ejemplo: Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + y = 7 & (I) \\ x + 3y = 11 & (II) \end{cases}$$

1. De la ecuación (I) $\quad y = 7 - 2x$
2. En la (II) $\quad x + 3(7 - 2x) = 11$
3. $x + 21 - 6x = 11 \Rightarrow x = 2$
4. $y = 7 - 2 \cdot 2 \Rightarrow y = 3$
5. Verificación $\quad \begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 = 7 \\ 2 + 3 \cdot 3 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 3 = 7 \\ 2 + 9 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = 7 \\ 11 = 11 \end{cases}$

$$S = \{(2;3)\} \quad \therefore \textit{Sistema Compatible Determinado}$$

Gráficamente



B. Método de sumas y restas

Este método consiste en sumar o restar las dos ecuaciones para reducir dicho sistema a una ecuación con una sola incógnita.

Para ello será necesario multiplicar una ecuación y en algunos casos las dos ecuaciones por números convenientes para que en las dos ecuaciones los coeficientes de una de las incógnitas sean números opuestos o iguales.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x+2y=9 & (I) \\ 3x-y=20 & (II) \end{cases}$$

Multiplicando por 2 la (II)

$$\begin{cases} x+2y=9 & (I) \\ 6x-2y=40 & (II) \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro las dos ecuaciones

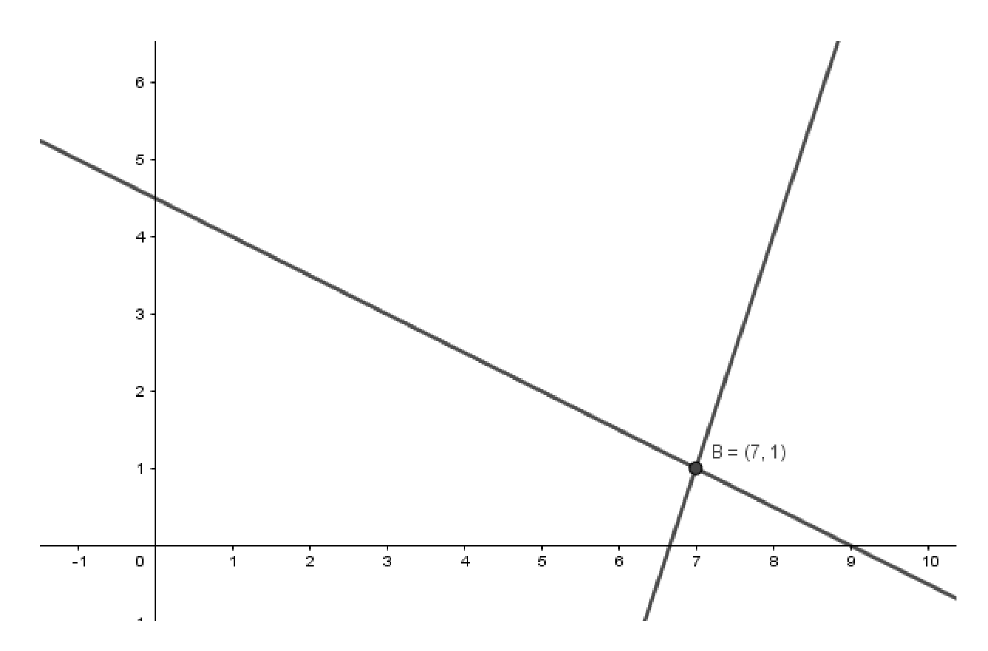
$$\begin{array}{rr} & x+2y=9 \\ + & 6x-2y=40 \\ \hline & 7x=49 \\ & x=7 \end{array}$$

Calculamos el valor de la otra incógnita sustituyendo el valor de x en cualquiera de las dos ecuaciones.

En la (I) queda

$$7+2y=9$$
$$2y=9-7$$
$$y=\frac{2}{2}$$
$$y=1$$

$S=\{(7;1)\}$ $\quad\therefore$ *Sistema Compatible Determinado*



C. Método de igualación

1. Despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones.
2. Igualar las dos expresiones.
3. Resolver la ecuación resultante y obtener el valor de la incógnita.
4. Sustituir el valor de la incógnita obtenida en cualquiera de las ecuaciones despejadas en el paso1.

Ejemplo: $\begin{cases}3x-2y=8\\ x+y=6\end{cases}$

$$\begin{cases}3x-2y=8\Rightarrow x=\dfrac{8+2y}{3}\\ x+y=6\Rightarrow x=6-y\end{cases}$$

$$\frac{8+2y}{3}=6-y$$

$$8+2y=(6-y).3$$

$$8+2y=18-3y$$

$$2y+3y=18-8$$

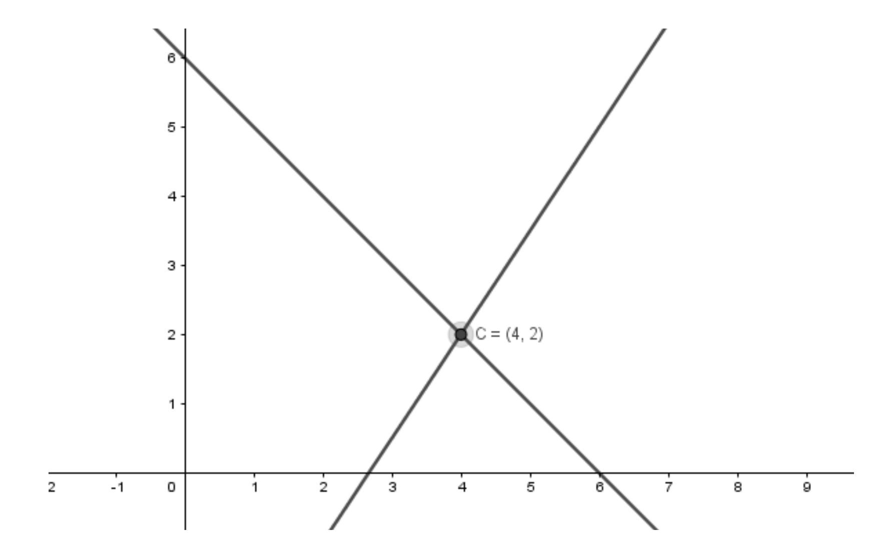
$$5y=10$$

$$y=2$$

$$x=6-2$$

$$x=4$$

$S=\{(4;2)\}$ $\quad\therefore$ *Sistema Compatible Determinado*



Actividad

1. Resolver:

1.1 $7x + 7 = 5x + 14$

1.2 $4x - 12 = 3x$

1.3 $\frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{4} = 1$

1.4 $28 - 3x + 1 = 0$

1.5 $4(2 - x) - 8 = 0$

1.6 $x + 2 = \frac{3x+1}{3}$

2. Plantear y resolver la ecuación

2.1 Si al doble de un número se le resta su mitad resulta 54. ¿Cuál es el número?

2.2 La base de un rectángulo es el doble de su altura. ¿Cuáles son sus dimensiones si el perímetro mide 30 cm?

2.3 La tercera parte de un número menos su duplo es igual a un quinto del mismo número menos 28. ¿Cuál es el número?

2.4 Hallar un número tal que si le restamos su mitad, obtenemos el mismo resultado que si a la mitad de la unidad le restamos uno.

2.5 Hallar dos números naturales impares consecutivos tales que multiplicados entre sí dan como resultado 255

2.6 En una librería, Ana compra un libro con la tercera parte de su dinero y un cómic con las dos terceras partes de lo que le queda. Al salir de la librería tiene $ 12. ¿Cuánto dinero tenía Ana?

3. Resolver los siguientes sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Realizar el gráfico en todos los casos

3.1 $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ 3.2 $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ 3.3 $\begin{cases} x - y = 6 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$

4. Plantear y resolver el sistema de ecuaciones

4.1 Una persona tiene en el bolsillo de su pantalón $1100 en billetes de $50 y $ 100. Si en total posee 17 billetes. ¿Cuántos son de 100 y cuántos de 50?

4.2 En un corral hay 40 animales entre conejos y gallinas. Se suman un total de 106 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay?

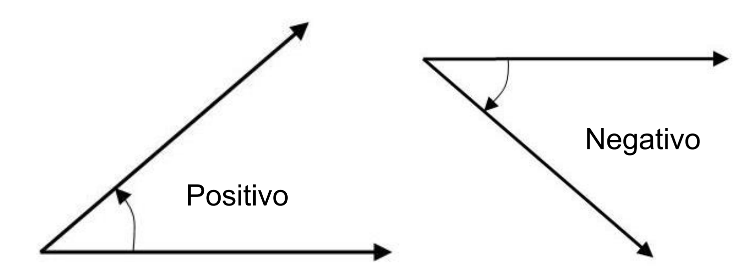
4.3 Dos ángulos son suplementarios y uno de ellos es 20º mayor que el otro. ¿Cuánto mide cada ángulo?

Sistema de medición de ángulos

Analizaremos dos sistemas diferentes que se usan para expresar la medida de un ángulo.

Signos de los ángulos:

Tomaremos como ángulo positivo aquel que se obtiene de hacer rotar una semirrecta en sentido antihorario y como ángulo negativo aquel que se obtiene de hacer girar una semirrecta en sentido horario.



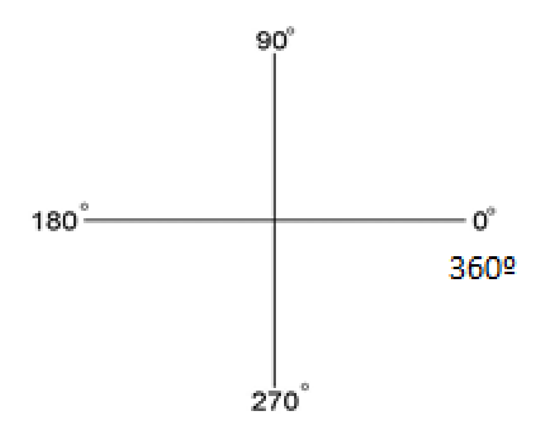
1) Sistema sexagesimal

Si dividimos una circunferencia en 360 arcos iguales y unimos los puntos de división con el centro, obtendremos 360 ángulos iguales a cada uno de los cuales se asigna el valor de un grado sexagesimal (1°).

A su vez, cada ángulo de un grado se subdivide en 60 partes iguales llamadas minutos y por último cada ángulo de un minuto vuelve a subdividirse en 60 partes, obteniéndose un ángulo de un segundo.

Entonces: el ángulo de un giro tiene 360°. El ángulo de medio giro, llamado ángulo llano mide 180°. El ángulo de un cuarto de giro, se denomina ángulo recto y mide 90°; la mitad de un

ángulo recto mide 45°. Un ángulo de 33 grados sexagesimales, 45 minutos y 30 segundos, se escribe: 33°45'30''.



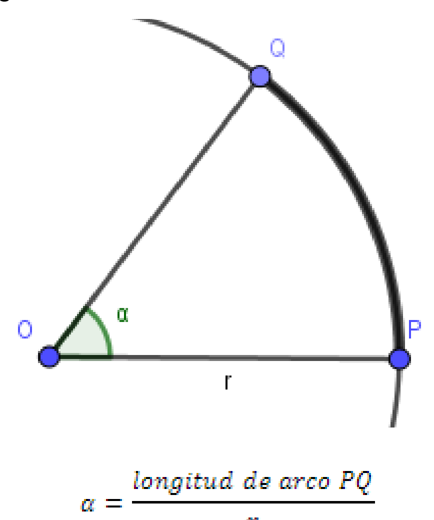
2) Sistema circular.

Este sistema utiliza como unidad de medida el "radián" (1 rad). Un radián corresponde al ángulo central de una circunferencia, cuya longitud de arco es equivalente al radio.

Para saber cuántos radianes mide un ángulo determinado, debemos saber cuántas veces cabe el radio de la circunferencia en el arco de la misma recorrido por dicho ángulo.

La medida de un ángulo queda definida en este sistema, como el cociente entre la longitud del arco PQ y la longitud del radio (r).

Si designamos con α al ángulo de vértice coincidente con el centro de la circunferencia:



$$\alpha = \frac{longitud\ de\ arco\ PQ}{r}$$

El ángulo de un giro mide 2π radianes. El ángulo de medio giro mide π radianes. El ángulo recto mide $\frac{\pi}{2}$ radianes. La mitad de un ángulo recto mide $\frac{\pi}{4}$ radianes.

Teniendo en cuenta la medida del ángulo llano en los sistemas, puede establecerse la siguiente proporción:

$$\frac{\alpha^r}{\pi} = \frac{\alpha^o}{180^\circ} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha^r = \frac{\pi}{180^\circ}\alpha^\circ$$

En el sistema de medida en radianes, el ángulo de un radián (longitud del arco igual a la medida del radio) equivale a un ángulo del sistema sexagesimal de 57° 17’44”,80; en efecto:

$$\pi\ rad \underline{\qquad\qquad} 180^0$$

$$1\ rad \underline{\qquad\qquad} \frac{180^0}{\pi} = 57^\circ\ 17'44'',8$$

Por ejemplo:

- Si $\alpha^\circ = 30^\circ$, lo expresamos en radianes

$$\alpha^r = \frac{\pi}{180^\circ} \bullet 30^\circ = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236$$

- Si $\alpha^r = 0{,}7854$, al expresarlo en el sistema sexagesimal se obtiene

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \bullet 0{,}7854 = 45^\circ$$

Actividad

1. Transformar a radianes los siguientes ángulos expresados en el sistema sexagesimal:

1.1. $240°$

1.2. $300°$

1.3. $53°\ 18'18''$

1.4 $146°\ 30'30''$

1.5 $267°\ 38'73''$

2. Transformar al sistema sexagesimal, los siguientes ángulos expresados en radianes:

2.1. $\frac{\pi}{6}$

2.2. $3{,}27$

2.3. $\frac{3\pi}{2}$

2.4. $5{,}19$

3. Hallar la medida en el sistema sexagesimal del ángulo correspondiente a un arco de 150 cm de longitud en una circunferencia de radio $r = 25\ m$.
4. Las ruedas de un automóvil tienen un diámetro de $876\ mm$. ¿Cuántos centímetros avanza el automóvil si las ruedas giran un ángulo llano?

Introducción a la geometría

Existe una estrecha relación entre los conceptos geométricos y el mundo que nos rodea.

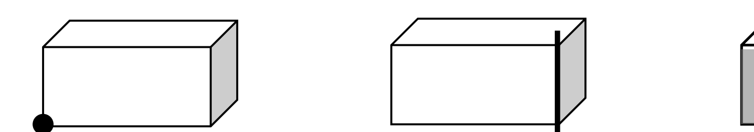
La geometría surge a partir de la observación de cosas simples y es por ello que el estudio de la geometría no debe aislarse del mundo ni de las otras áreas de la Matemática.

Es la naturaleza misma quien ha proporcionado al hombre las primeras lecciones de geometría ya que existen en ella innumerables ejemplos de formas geométricas.

A lo largo de la historia de la humanidad el hombre ha utilizado las formas geométricas que provee la naturaleza para la creación de objetos útiles para el desarrollo de sus actividades.

Punto, recta, plano y espacio

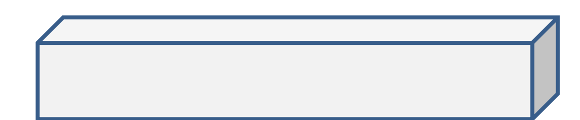
Las siguientes figuras dan la idea de punto, recta y plano.



Punto: La marca más pequeña que se puede dibujar. Es una ubicación sin longitud, ancho o altura.

Recta: La línea más fina que se puede dibujar. Longitud ilimitada, derecha, sin grosor ni extremos.

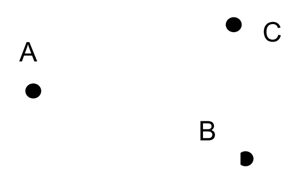
Plano: Es el corte más delgado posible. Ilimitado, continuo en todas las direcciones pero sin grosor.



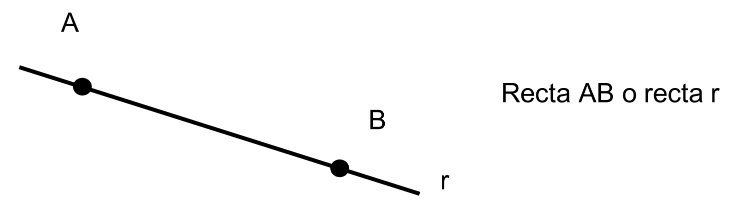
Espacio: Es el conjunto de todos los puntos. Todo punto, recta y plano está en el espacio

Relaciones entre puntos, rectas y planos

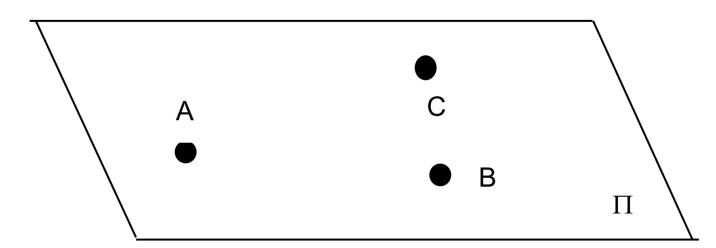
Para representar puntos sobre un papel, se dibujan marcas lo más pequeñas posibles.



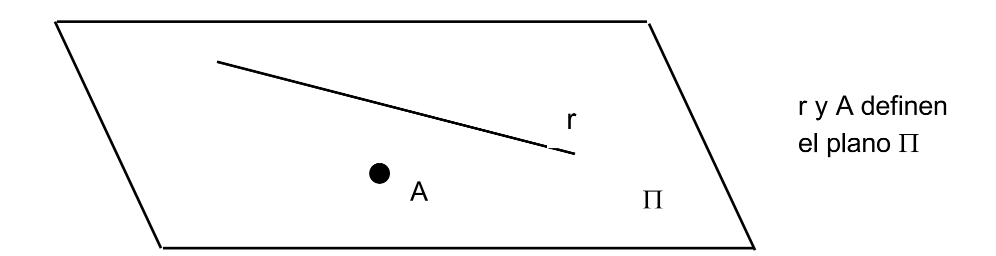
Una recta se puede considerar como un conjunto de puntos alineados. Un par de puntos define una y sólo una recta.



Un plano puede definirse si se conocen tres puntos no alineados.



Los puntos A, B y C definen el plano Π. También definen un plano, una recta y un punto que no le pertenece.



Algunas definiciones importantes

Puntos colineales: son los que están sobre una misma recta.

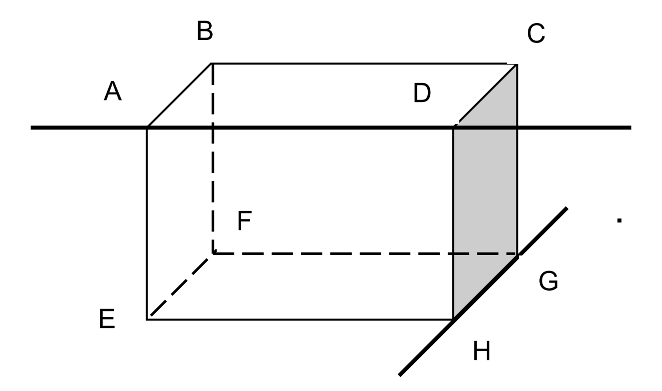
Puntos coplanares: son los que pertenecen a un mismo plano.

Rectas que se cortan o “intersecan”: son aquellas que tienen un único punto común.

Rectas paralelas: son las que no se intersecan, estando sobre un mismo plano.

Rectas concurrentes: son tres o más rectas que se cortan en un punto.

Rectas alabeadas: no son paralelas ni coincidentes, ni se intersecan (son rectas ubicadas en el espacio tridimensional).



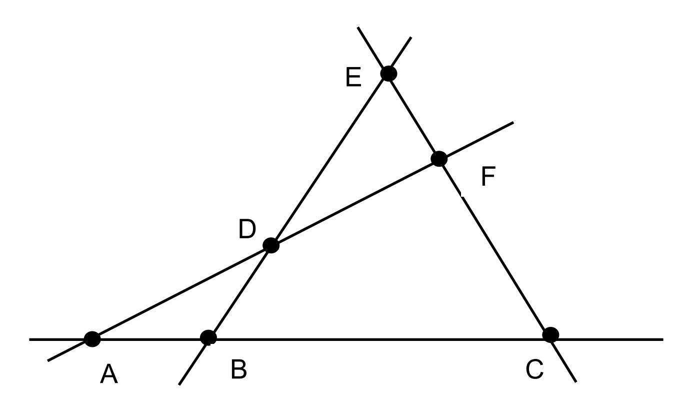
Actividad

1. En la siguiente figura:

1.1 Nombrar todos los conjuntos de tres puntos colineales.

1.2 Nombrar conjuntos de puntos no colineales.

1.3 Nombrar cuatro puntos entre los cuales no haya tres que sean colineales.

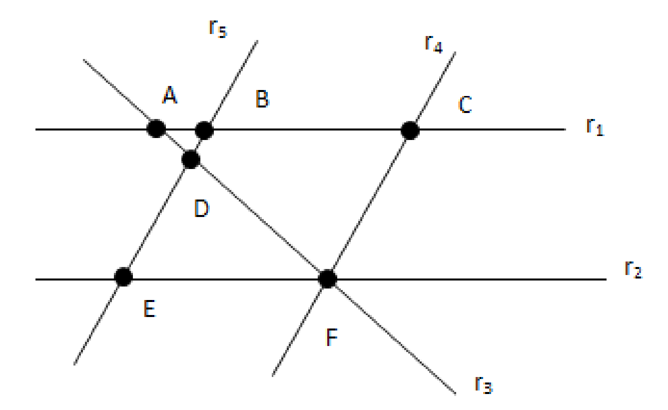


2. En la siguiente figura:

2.1 Encontrar tres pares de rectas intersecantes.

2.2 Encontrar tres rectas concurrentes.

2.3 Enumerar todos los pares de rectas paralelas.

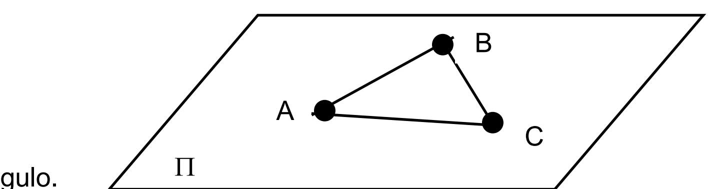


Figuras geométricas

Teniendo en cuenta que las rectas, los planos y los espacios han sido definidos como conjuntos de puntos, definimos del mismo modo las figuras geométricas.

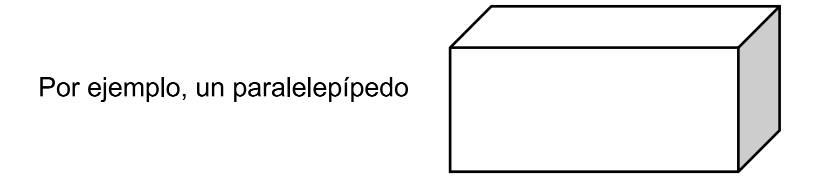
Una figura plana es aquella que tiene todos sus puntos en un plano, pero no sobre la misma recta.

Por ejemplo, un triángulo.



Un cuerpo no tiene todos sus puntos en un mismo plano.

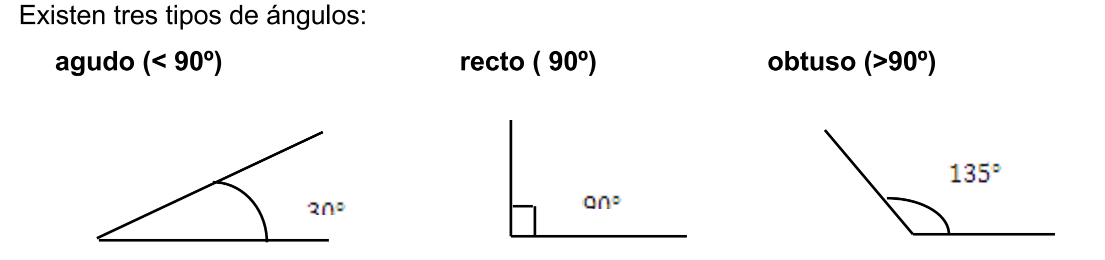
Por ejemplo, un paralelepípedo



Ángulos

Existen tres tipos de ángulos:

agudo (< 90º) **recto (90º)** **obtuso (>90º)**



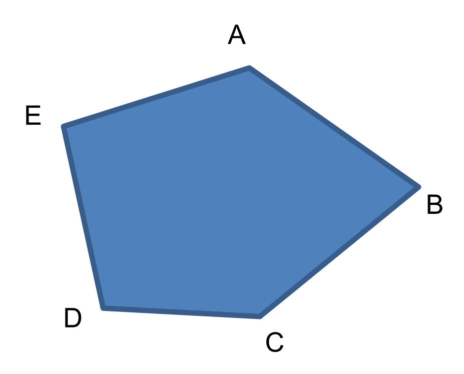
Nota: los ángulos mayores de 180° y menores de 360° se llaman cóncavos.

Polígonos

Un polígono es la unión de segmentos que se juntan en sus extremos de manera tal que:

a) dos segmentos se encuentran como máximo en un punto.

b) cada segmento toca exactamente a otros dos.

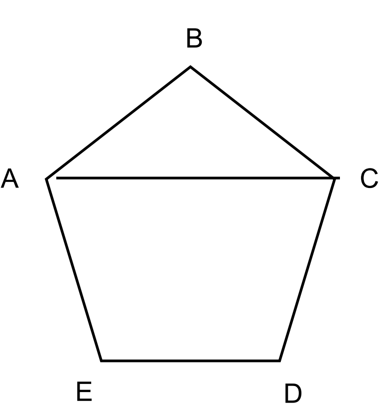


La palabra polígono viene del griego polygonos. **“Polys”** que significa muchos y **“gonia”** que significa ángulos. La “traducción” más precisa de la palabra polígono es “figura que tiene muchos ángulos”.

Los nombres de los polígonos de menos de veinte ángulos son: (El número de ángulos coincide con el número de lados).

Número de lados	Nombre del polígono
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono o Nonágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
13	Tridecágono
14	Tetradecágono
15	Pentadecágono
16	Hexadecágono
17	Heptadecágono
18	Octadecágono
19	Eneadecágono

Elementos de un polígono



A, B, C, D y E son los vértices.

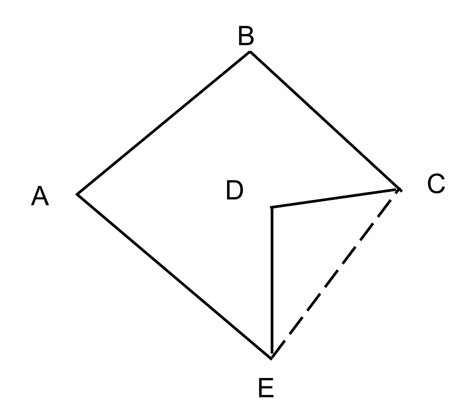
$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$ y $\overline{EA}$ son los lados.

Si unimos dos vértices no consecutivos, $\overline{AC}$ es una diagonal

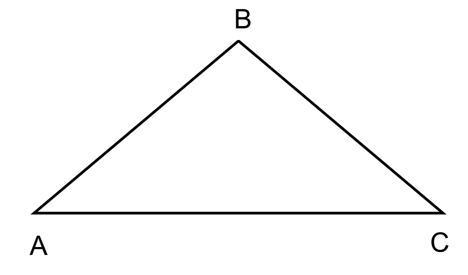
Polígonos convexo y cóncavo

Si todas las diagonales están en el interior del polígono, se lo llama polígono convexo.
Si una diagonal es exterior al polígono, el polígono es cóncavo,

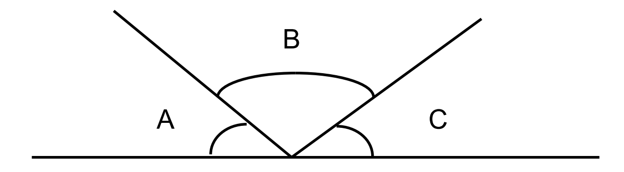
por ejemplo, en la figura, la diagonal $\overline{CE}$



Suma de los ángulos interiores de un triángulo



Si se cortan los ángulos y se disponen como en la figura siguiente, se observa que:



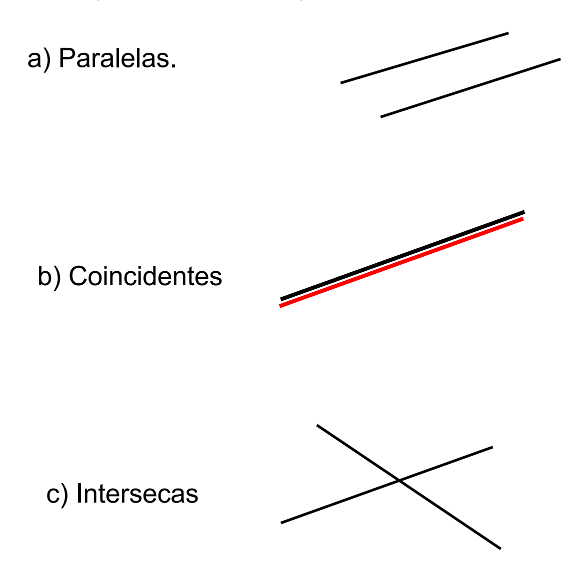
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ}$

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°

- En un triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo.
- Un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Rectas y planos

En el plano dos rectas pueden ser:



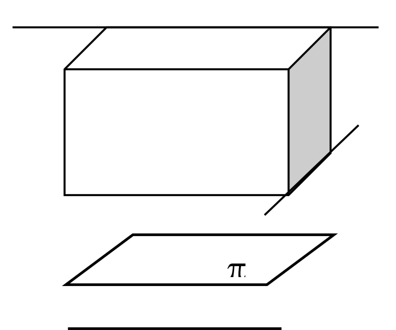
a) Paralelas.

b) Coincidentes

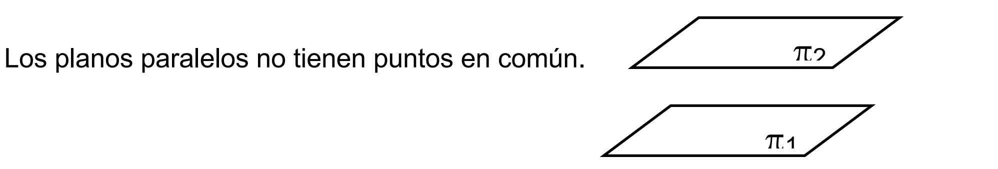
c) Intersecas

En el espacio tridimensional dos rectas pueden ser:

a) Paralelas y/o coincidentes (definen un plano).
b) Intersecas.
c) Alabeadas. (no se intersecan y no están en el mismo plano)



Una recta y un plano son paralelos si no tienen puntos en común.

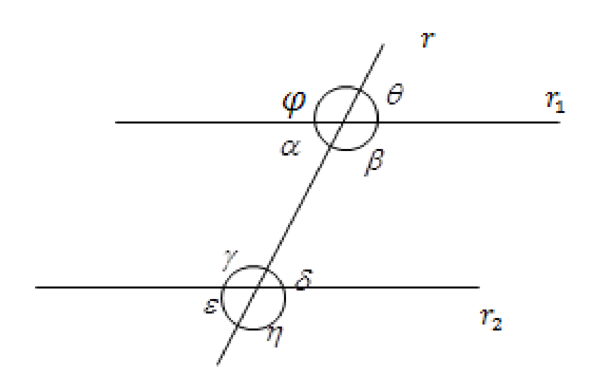


Los planos paralelos no tienen puntos en común.

Una transversal es una recta que interseca a dos rectas coplanares en dos puntos distintos.

Rectas paralelas cortadas por una transversal

La transversal r corta a r_1 y r_2 en dos puntos, formando los ángulos interiores $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ y los ángulos externos $\eta, \varepsilon, \theta, \varphi$.



Los pares de ángulos α, δ y β, γ se denominan alternos internos. Los ángulos alternos internos son congruentes.

Los pares de ángulos ε, θ y φ, η son alternos externos. Los ángulos alternos externos son congruentes.

Los pares de ángulos α, ε; β, η; φ, γ y θ, δ son correspondientes. Los ángulos correspondientes son iguales.

Los pares de ángulos α y γ; β y δ son conjugados internos. Estos ángulos son suplementarios.

Los pares de ángulos ε y φ; θ y η son conjugados externos. Estos ángulos son suplementarios.

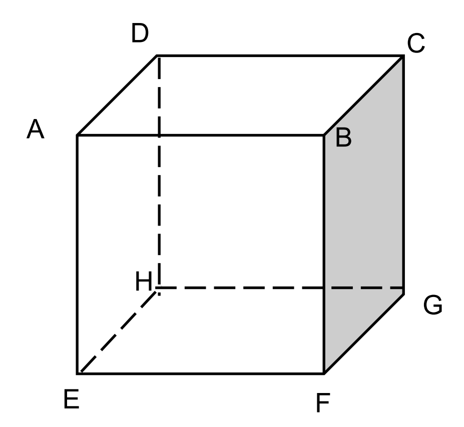
Actividad

1. En el cubo de la figura:

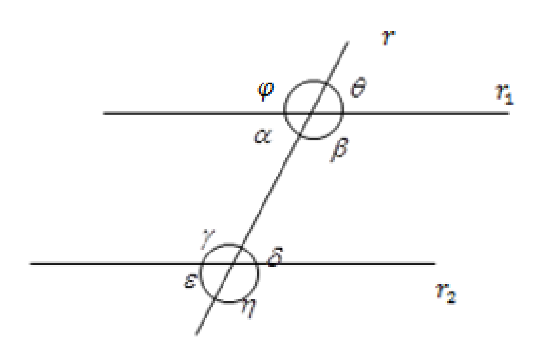
1.1 Nombrar 4 rectas que sean alabeadas con AB.

1.2 Reconocer 6 rectas paralelas al plano ABCD.

1.3 Enunciar 3 pares de planos paralelos.



2. La recta r corta a las rectas paralelas r_1 y r_2 . Sabiendo que $\varphi = 2x + 80°$ y $\gamma = x + 90°$, determinar el valor de x y todos los ángulos de la figura.



Triángulos

Clasificación según sus lados

Equilátero: tiene los tres lados congruentes.

Isósceles: tiene “al menos” dos lados congruentes.

Escaleno: no tiene lados congruentes.

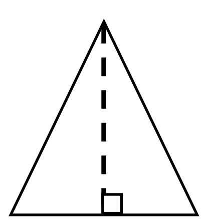
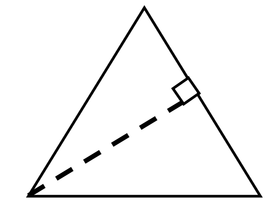
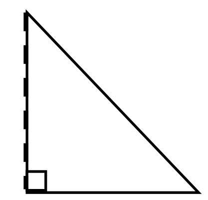
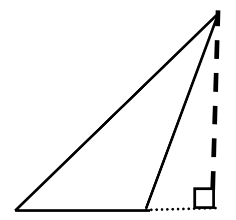
Clasificación según sus ángulos

Acutángulo: tiene los tres ángulos agudos.

Rectángulo: tiene un ángulo recto.

Obtusángulo: tiene un ángulo obtuso.

La altura de un triángulo es el segmento que une un vértice hasta la recta sostén del lado opuesto y es perpendicular a ese lado.

Actividad

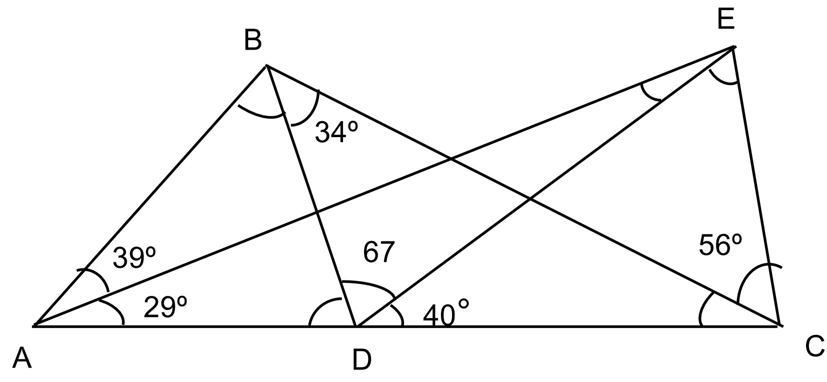
1. Dibujar, si es posible, en cada casilla un triángulo que responda a las consignas:

	EQUILÁTERO	ISÓSCELES	ESCALENO
ACUTÁNGULO			
RECTÁNGULO			
OBTUSÁNGULO			

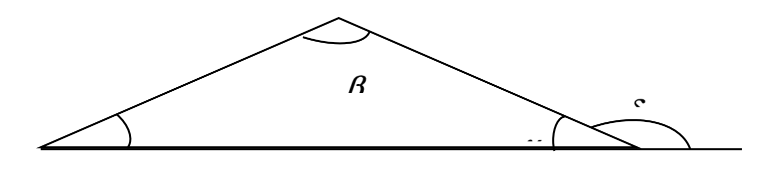
2. En la siguiente figura:

2.1 Completar los ángulos faltantes.

2.2 Identificar los triángulos: ABC; ADE; BDC; ABD; ACE; DCE y clasificarlos según sus ángulos.



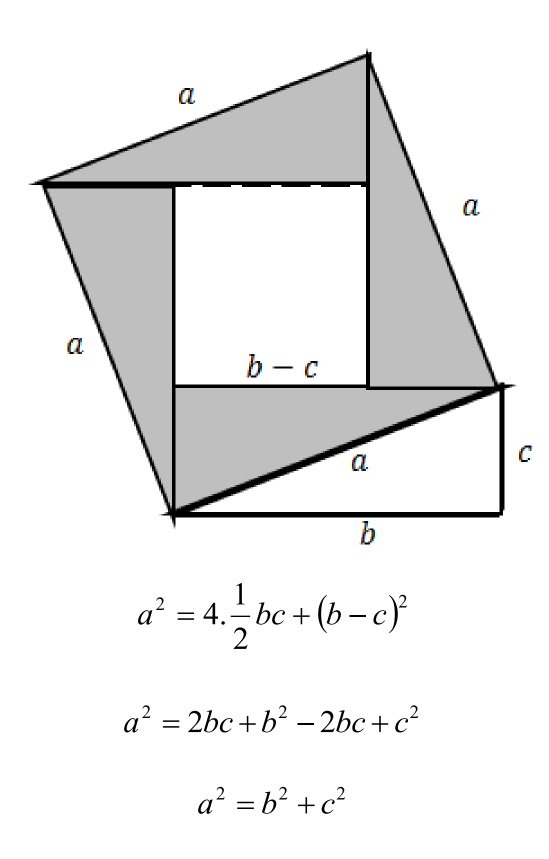
Observación: Si la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º, puede demostrarse fácilmente que la amplitud de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes.



$$\delta = \alpha + \beta$$

Teorema de Pitágoras

Si ABC es un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.



$$a^2 = 4.\frac{1}{2}bc + (b-c)^2$$

$$a^2 = 2bc + b^2 - 2bc + c^2$$

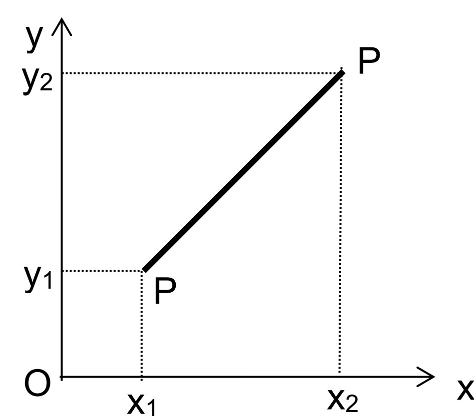
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Distancia entre dos puntos en el sistema de coordenadas cartesianas

Sean $P_1\ (x_1 ; y_1)$ y $P_2(x_2 , y_2)$, la distancia entre los puntos coincide con la longitud del segmento $\overline{P_1P_2}$.

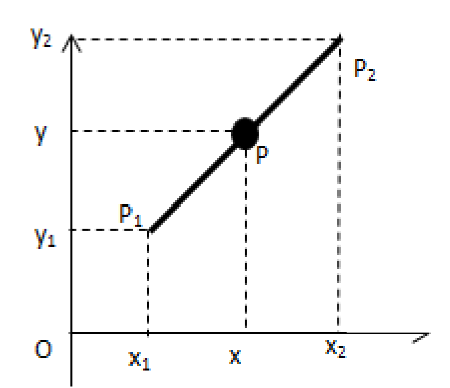
Aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Punto medio de un segmento

Para calcular las coordenadas del punto medio de un segmento $\overline{P_1P_2}$, se debe realizar el promedio entre las coordenadas de los extremos.



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Actividad

1. Hallar la distancia entre los puntos y determinar las coordenadas del punto medio.

1.1 $P_1(-2,4)$ y $P_2(2,-4)$

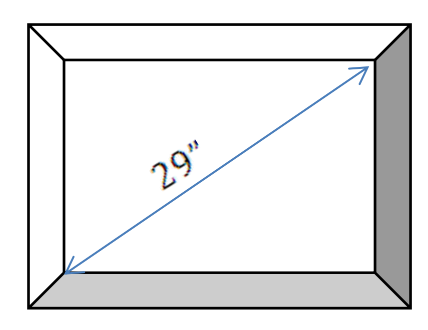
1.2 $P_1(3,-1)$ y $P_2(2,5)$

2. Demostrar que los puntos:

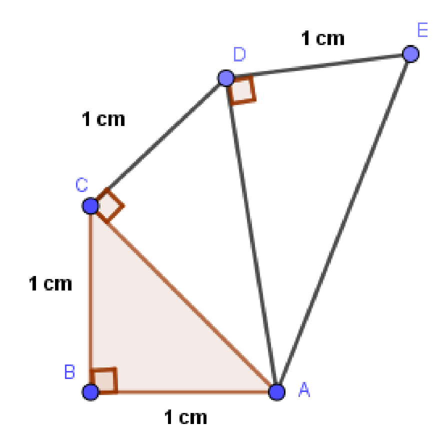
2.1 $A(-11,3)$; $B(-8,-2)$; $C(3,8)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

2.2 $A(7,5)$; $B(2,3)$; $C(6,-7)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. Hallar el área.

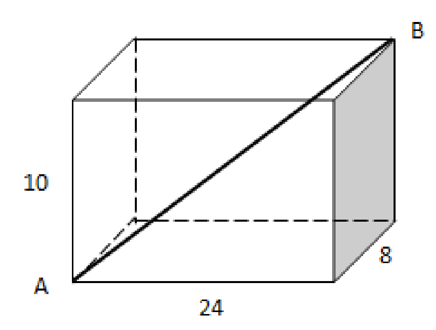
3. Un anuncio de venta de un televisor dice que la pantalla es de 29 pulgadas; si la altura es de 0,8 del ancho de pantalla y el aviso refiere a la diagonal de la misma. ¿Cuál es (expresado en cm) la medida del ancho y de la altura? $(1'' = 2{,}54\ cm)$



4. Hallar las longitudes $\overline{AC}, \overline{AD}$ y $\overline{AE}$



5. Una caja tiene 24 cm. de largo, 8 cm. de ancho y 10 cm. de alto. ¿Cuál es la longitud de la diagonal AB?



6. El hueco de una ventana mide 100 cm. de ancho y 70 cm. de altura. ¿Puede introducirse por la ventana una mesa de ping pong de 1,25 m. de ancho?

7. Si la longitud del lado de un hexágono regular es de 1 cm. ¿Cuál es la longitud del segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos?

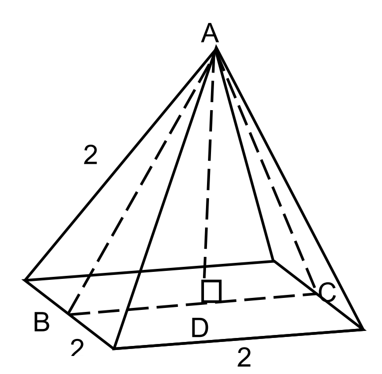
8. Si un triángulo equilátero tiene lados de longitud 1 m., calcular el radio de la circunferencia que contiene los tres vértices.

9. Si una pirámide de base cuadrada tiene todas sus aristas de 2 cm. de longitud

9.1 Hallar las longitudes $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

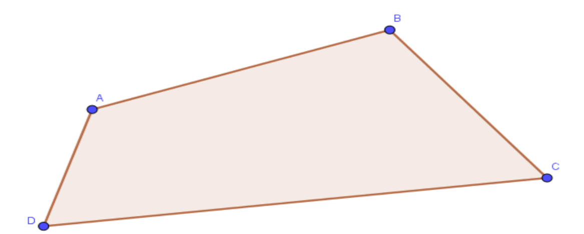
9.2 Hallar la altura de la pirámide.

9.3 ¿Es el triángulo ABC equilátero?



Cuadriláteros

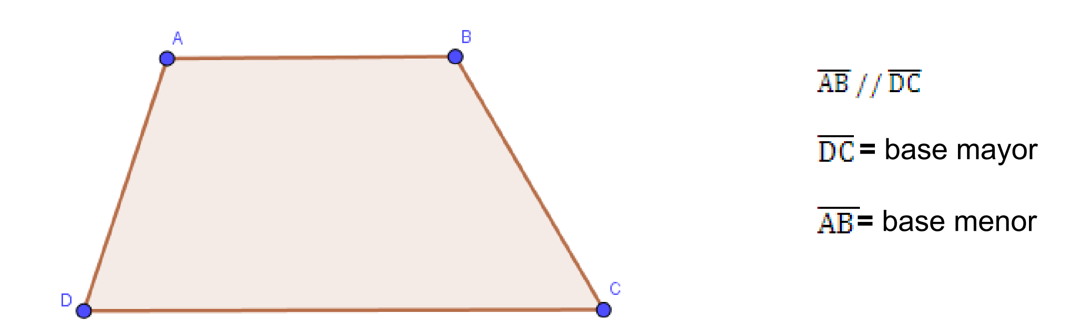
Es la unión de cuatro segmentos determinados por cuatro puntos, tres de los cuales no deben ser colineales. Los segmentos sólo deben intersecarse en sus extremos.



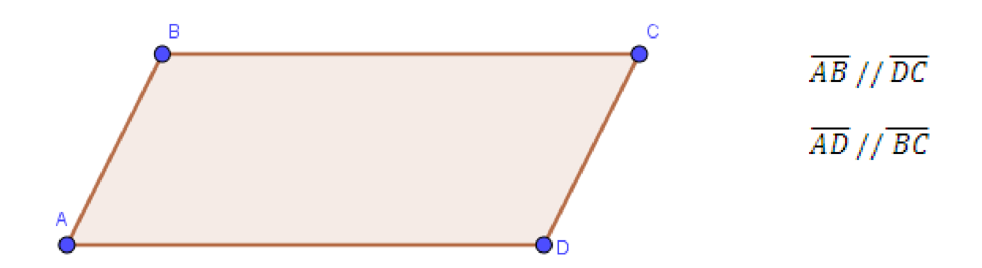
Los lados AB y CD que no tienen vértices comunes, se denominan lados opuestos.
Los lados AB y BC tienen un vértice común y se denominan por tal razón, lados adyacentes.
Los ángulos A y C son opuestos.

Descripción de los tipos básicos de cuadriláteros

Trapecio: es un cuadrilátero con dos lados paralelos.



Paralelogramo: es un cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos paralelos.



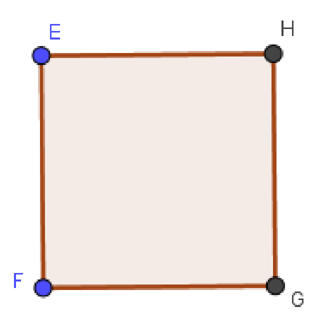
Algunas propiedades de los paralelogramos:

- Los ángulos opuestos son congruentes.
- Los lados opuestos son congruentes.
- Las diagonales se cortan en el punto medio.

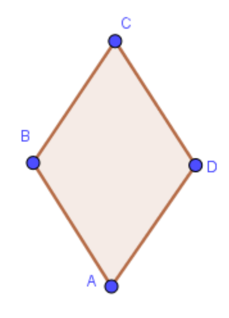
Rectángulo: es un paralelogramo con cuatro ángulos rectos.



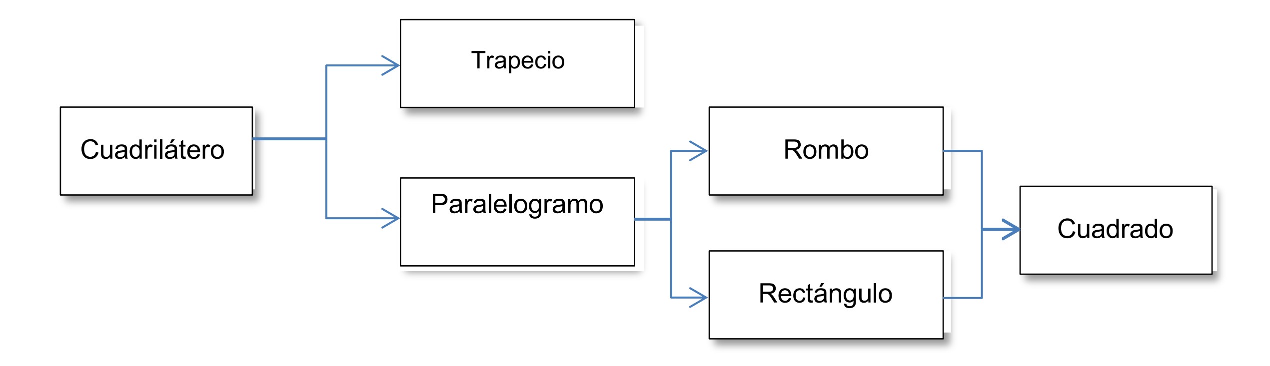
Observación: Si los lados son iguales, se trata de un cuadrado.



Rombo: es un paralelogramo con sus cuatro lados congruentes.



Clasificación de los cuadriláteros



Actividad

1. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F):

   1.1 Un cuadrado es un rectángulo.

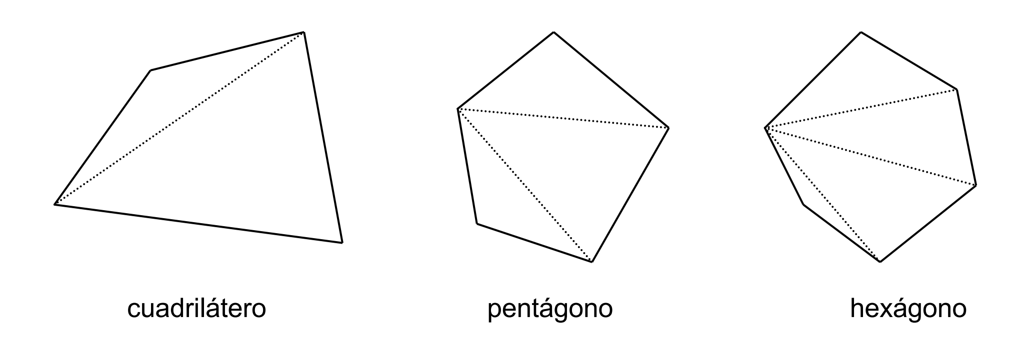
1.2 Un rectángulo es un paralelogramo.
1.3 Un paralelogramo es un rombo.
1.4 Un trapecio es un paralelogramo.
1.5 Algunos paralelogramos son rectángulos.
1.6 Un rombo es un cuadrado.
1.7 Algunos rombos son rectángulos.
1.8 Un paralelogramo es un trapecio.
1.9 Un trapecio puede tener sólo dos ángulos rectos.
1.10 Un rombo puede tener los cuatro ángulos rectos.

2. El paralelogramo de la siguiente figura tiene como lados $\overline{AB} = x + 5$ y $\overline{CD} = 2x - 7$ Hallar la longitud del lado $\overline{AB}$.



3. Sea el paralelogramo de la figura anterior en la cual $\overline{AB} = 2x$; $\overline{CD} = 3y + 4$; $\overline{BC} = x + 7$; y $\overline{AD} = 2y$. Calcular las longitudes de los lados del paralelogramo.

Descomposición de un polígono en triángulos



Para todos los casos, la suma de los ángulos interiores es igual a la suma de los ángulos interiores de todos los triángulos que componen el polígono. Puede construirse la siguiente tabla:

Polígono	Nro. de Lados	Nro. de Triángulos	Suma de las medidas de los ángulos
Cuadrilátero	4	2	$2 \cdot 180° = 360°$
Pentágono	5	3	$3 \cdot 180° = 540°$
Hexágono	6	4	$4 \cdot 180° = 720°$
------------			
n-gono	N	$n-2$	$(n-2) \cdot 180°$

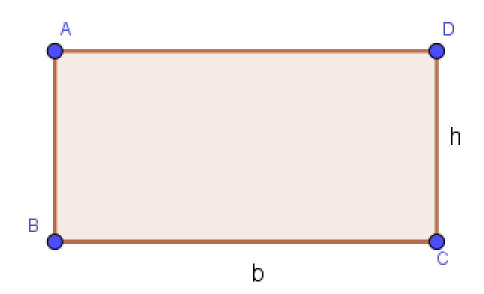
La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es igual a $(n-2) \cdot 180°$

La medida de un ángulo de un polígono regular de n lados es:

$$\frac{(n-2).180°}{n}$$

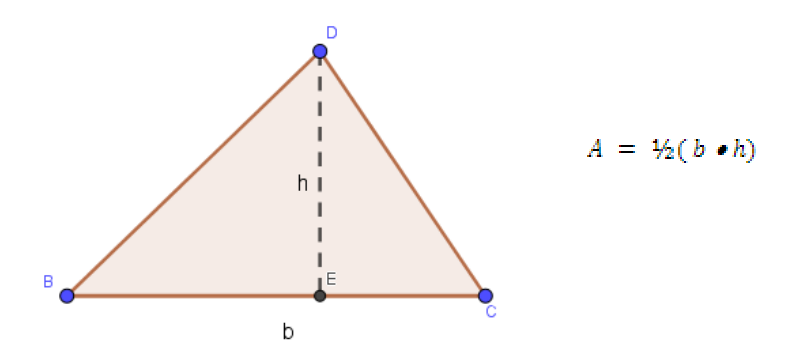
Superficies y perímetros

Superficie de un rectángulo:

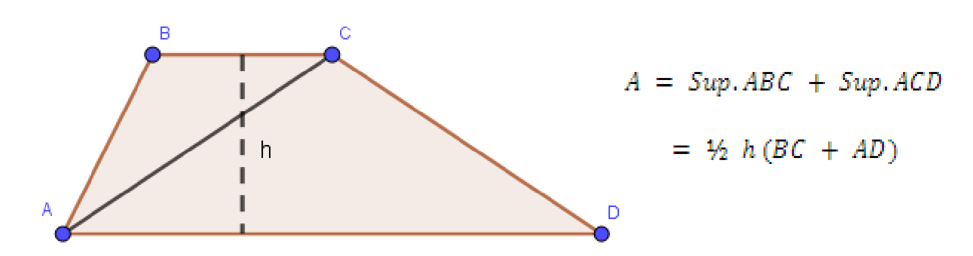


$A = b.h$

Superficie de un triángulo



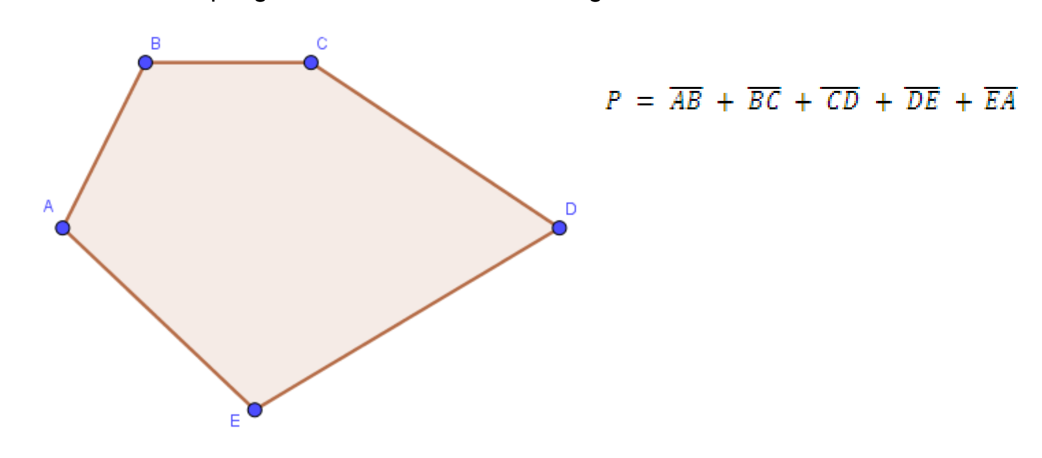
Superficie del Trapecio:



$$A = Sup.ABC + Sup.ACD$$

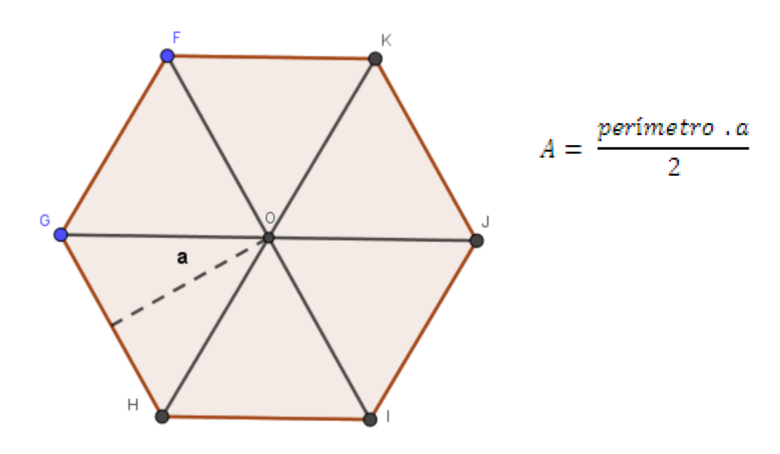
$$= ½\ h\,(BC + AD)$$

Perímetro de un polígono: Es la suma de las longitudes de sus lados.



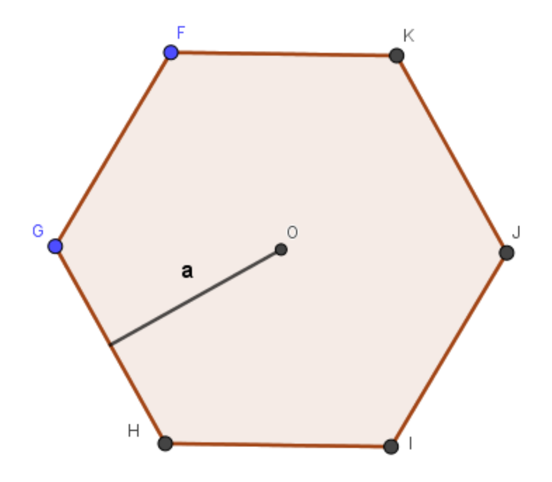
$$P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA}$$

Superficie de un polígono regular



$$A = \frac{perímetro\ .a}{2}$$

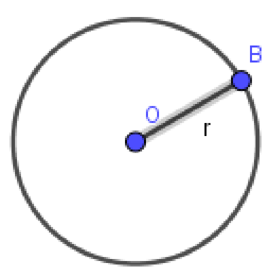
Se puede obtener sumando las áreas de los triángulos



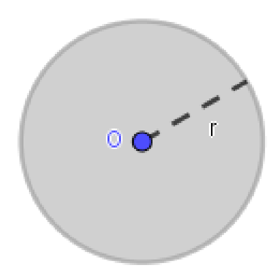
Definición.

Apotema (a): Es la distancia entre el centro de un polígono regular y un lado.

Circunferencia: Conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. La distancia entre el centro y un punto de la circunferencia se denomina radio.



Círculo: Es el conjunto de puntos del plano que están a una distancia menor o igual que el radio.



$$Área = \pi\, r^2$$

$$Longitud\ de\ la\ circunferencia = 2\, \pi\, r$$

Por ejemplo; si se desea saber cuántas veces mayor es la cantidad de agua que puede conducir una cañería de 6 pulgadas de diámetro, respecto de una de 4 pulgadas. $(1'' = 2{,}54\ cm)$

Diámetro de 6" = $15{,}24\ cm$ $\quad$ $A6 = \pi.(7{,}62\ cm)^2 = 182{,}4\ cm^2$

Radio= $7{,}62\ cm$

Diámetro de 4" = $10{,}16\ cm$ $\quad$ $A4 = \pi.(5{,}08\ cm)^2 = 81{,}1\ cm^2$

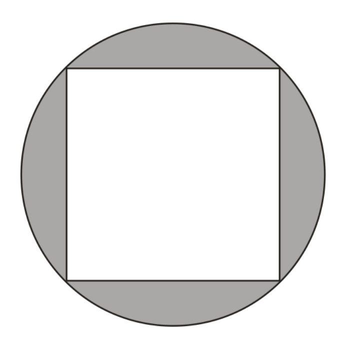
Radio= $5{,}08\ cm$

$$\frac{A6}{A4} = \frac{182.4\ cm^2}{81.1\ cm^2} = 2.25$$

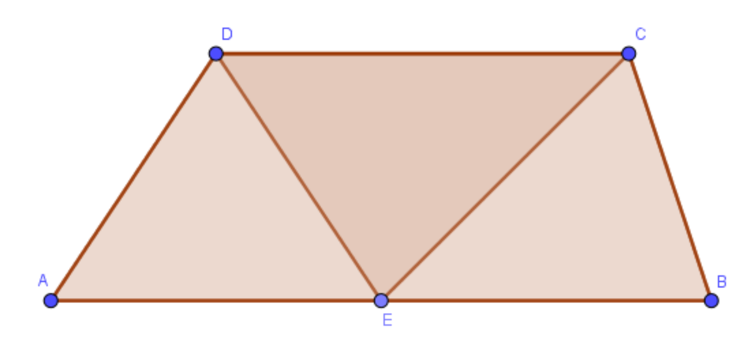
La cañería de 6" de diámetro tiene una sección 2,25 veces que la de 4", razón por la cual puede deducirse que permitirá conducir una cantidad de agua 2,25 veces mayor.

Actividad

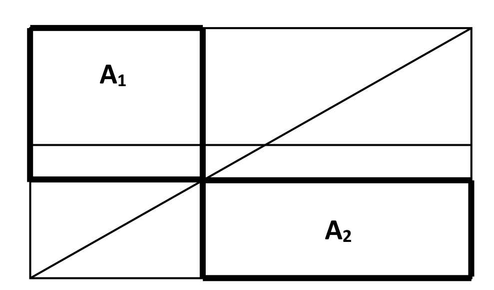
1. La longitud de cada lado de un hexágono regular es 4 unidades. Calcular el valor de la apotema y el área del hexágono.
2. Hallar la medida del lado del cuadrado inscripto en una circunferencia de 5 cm de radio. Calcular el área sombreada.



3. ABCD es un trapecio y E es el punto medio de AB. Demostrar que las áreas de AECD y EBCD son iguales.



4. Demostrar que las áreas A_1 y A_2 son iguales. (Observación: las áreas de los triángulos que genera la diagonal del rectángulo mayor son iguales).



5. La longitud de las aristas del cubo de la figura es 1.

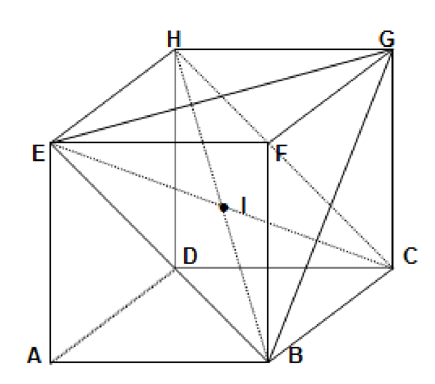
Hallar:

5.1 Longitud BE.

5.2 Longitud BH.

5.3 Área del triángulo BEG.

5.4 Área del rectángulo BCHE.

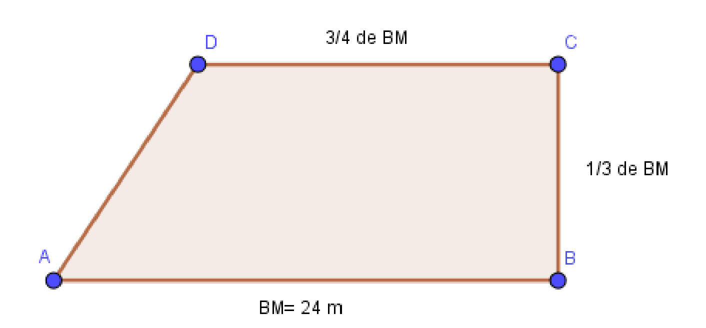


6. Un toldo de forma de cuadrada tiene $36\ m$ de diagonal. ¿Cuál es su superficie?

7. En los lados mayores de un terreno rectangular, se han plantado árboles cada $5\ m$. Si el ancho del mismo es de $42\ m$ y la superficie es de $2100\ m^2$. ¿Cuántos árboles se plantaron?

8. Una sala de forma cuadrada mide $20\ m$ de perímetro. ¿Cuántas baldosas de $0{,}20\ m$ de lado se necesitarán para embaldosar el piso?

9. Un terreno como el que se muestra en la figura debe cubrirse con césped sintético y rodear con alambre. ¿Qué cantidad de material debe utilizarse?

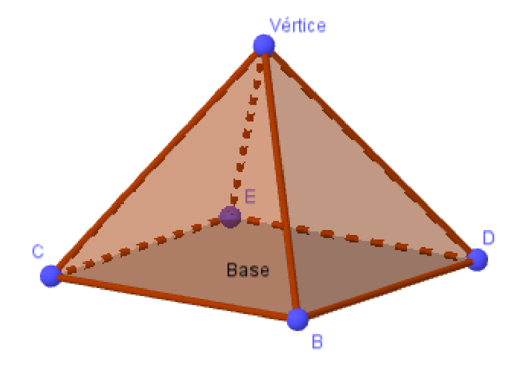


10. Un grupo de amigos organiza una fiesta. Para servir las bebidas cuentan con jarras cilíndricas cuyas medidas interiores son 12 cm de diámetro y 25 cm de altura. Si la jarra tiene una marca hasta la cual debe llenarse, que corresponde a los $\frac{4}{5}$ de su capacidad. ¿Cuántas jarras se necesitan para llenar hasta el borde 100 vasos de 6 cm de diámetro y 8 cm de altura?

Poliedros

Un poliedro es un objeto tridimensional limitado por regiones poligonales que se denominan caras. Los lados de las caras son las aristas del poliedro y los vértices de las caras coinciden con los vértices del poliedro.

Pirámide: Poliedro cuya base es un polígono y sus caras laterales son triángulos, los cuales tienen un vértice común llamado vértice de la pirámide.



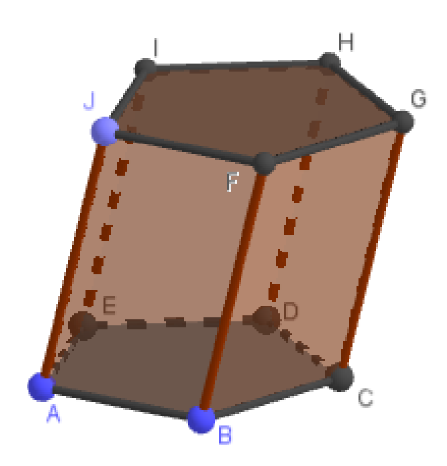
Observaciones:

- La altura de la pirámide es el segmento de recta que une el vértice con la base y que es perpendicular a ésta.

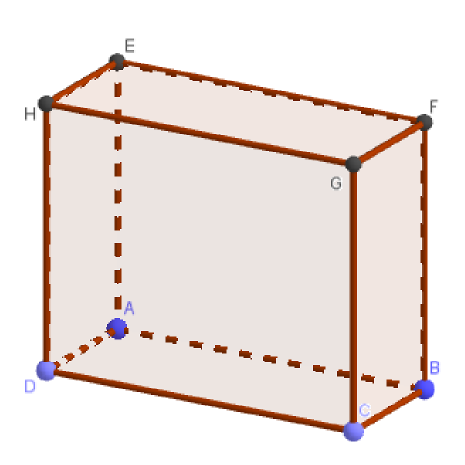
- Una pirámide es regular si su base es un polígono regular y sus aristas laterales son congruentes.

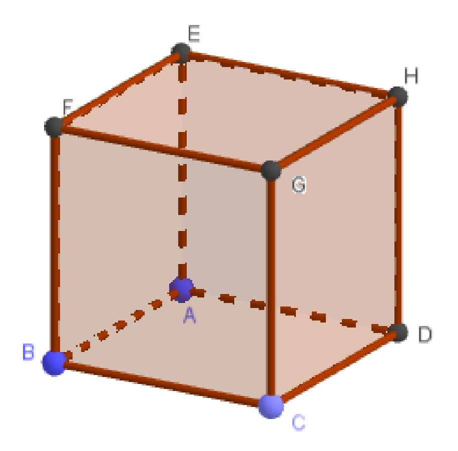
Prisma: Poliedro que tiene:

- Un par de caras congruentes sobre planos paralelos. Dichas caras se llaman bases.
- Todas las demás caras son paralelogramos.
- Las aristas laterales son paralelas y congruentes.



Si las bases del prisma son paralelogramos, el prisma recibe el nombre de paralelepípedo.





Observaciones:

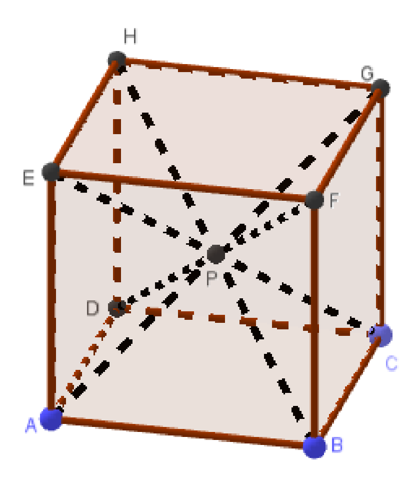
- El cubo es un caso particular de prisma.
- La altura de un prisma es la longitud de un segmento perpendicular a las bases.
- Un prisma es recto si sus aristas laterales son perpendiculares a la base.
- Tanto en los prismas como en las pirámides, las caras que no son bases se denominan caras laterales y las aristas que no pertenecen a la base se llaman aristas laterales.

Actividad

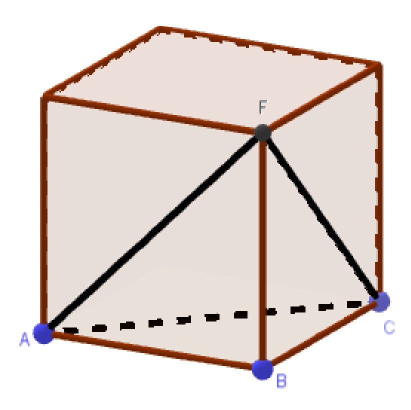
1. Dado el siguiente poliedro con vértices ABCDP

1.1 ¿Qué nombre recibe?

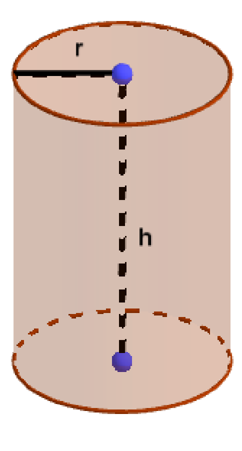
1.2 En cuántas pirámides divide al cubo los segmentos que van de P a cada uno de los vértices.



2. El cubo de la figura está cortado por el plano que pasa por A, C y F. Este corte forma la pirámide ABCF. Justificar que dicha pirámide es regular.



Área y volumen del cilindro



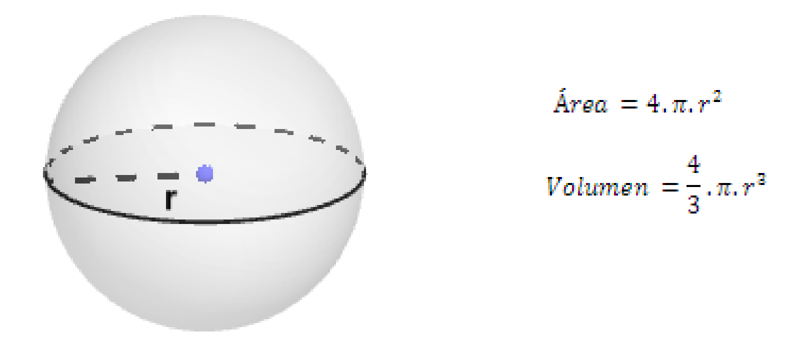
$$Área = 2.\pi.r.h + 2.\pi.r^2$$

$$Volumen = \pi.r^2.h$$

Actividad

1. Si el radio y la altura de un cilindro se duplican. ¿Cuánto se modifica su área y su volumen?

Área y volumen de la esfera:



Trigonometría

Objeto de la trigonometría

Para estudiar las relaciones que pueden establecerse entre los lados de un rectángulo, resulta suficiente medir sus lados, lo que equivale a medir segmentos y deducir consecuencias de esas mediciones.

Si el polígono de menor número de lados en que pudiera descomponerse un polígono cualquiera fuese un rectángulo, las herramientas que nos provee la Geometría serían suficientes para estudiar las relaciones entre sus elementos. Pero es sabido que cualquier polígono puede descomponerse por complicado que sea, en un número finito de triángulos y si han de establecerse relaciones entre los lados de un triángulo es necesario hacer intervenir en los cálculos las medidas de sus lados y de sus ángulos.

La rama de la Matemática que se ocupa de este problema se denomina Trigonometría (del griego: trigonos: triángulo; metría: medida); utilizando esta disciplina estaremos en condiciones de abordar la resolución numérica de triángulos.

La trigonometría resulta de fundamental importancia en el estudio de algunos problemas del Análisis Matemático y en el de fenómenos vibratorios vinculados con la Física, para lo cual es imprescindible el conocimiento del concepto que desarrollaremos de las relaciones trigonométricas.

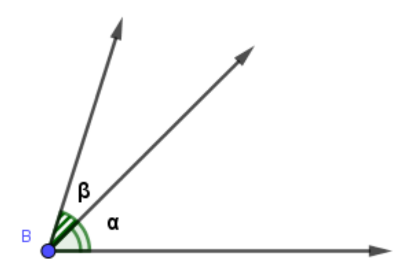
Conceptualmente, el estudio de cualquier construcción geométrica del plano puede ser transformado, usando la Trigonometría, en un problema aritmético; la ventaja de esta transformación se ha ido acentuando con el correr de los años debido al auxilio de nuevas tecnologías, que permite realizar cálculos con exactitud y rapidez.

Nuestro problema comienza al "medir" y como resulta en general sencilla y conocida la medición de segmentos, nos ocuparemos fundamentalmente de la medición de ángulos.

MEDIR un ángulo, es asignarle un número de manera tal que, ese número, permita reproducirlo en cualquier parte, sin necesidad de transportarlo materialmente de un lugar a otro.

Ángulos consecutivos

Son aquellos ángulos que tienen el vértice en común y, como lado común, el final de un ángulo y el comienzo del otro:



Aquellos ángulos consecutivos cuyos lados no comunes forman un ángulo recto, se denominan ángulos complementarios.

Si los lados no comunes de dos ángulos consecutivos forman un ángulo llano, dichos ángulos son suplementarios.

Los lados no comunes de dos ángulos consecutivos cualesquiera determinan un ángulo llamado ángulo suma.

Resolución de triángulos

El problema general de resolver un triángulo consiste en determinar sus elementos fundamentales (ángulos y lados) conociendo tres de ellos, de los cuales uno al menos debe ser un lado. Un triángulo queda determinado si se conocen:

a) dos lados y el ángulo comprometido.

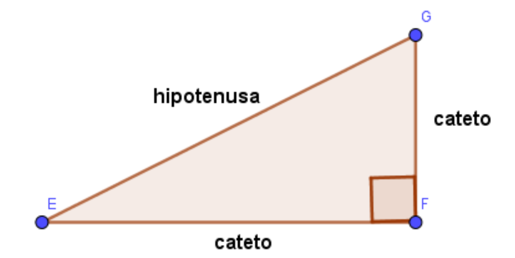
b) un lado y dos ángulos.

c) los tres lados.
d) dos lados y un ángulo opuesto.

Si, como caso particular el triángulo es rectángulo, basta con conocer dos elementos (además del ángulo recto).

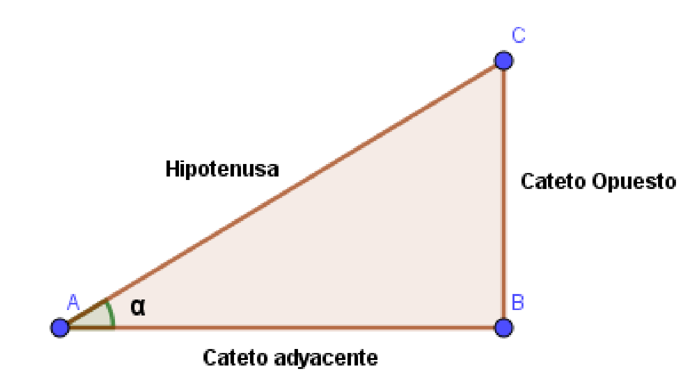
a) la hipotenusa y un ángulo agudo.
b) un cateto y un ángulo agudo.
c) la hipotenusa y un cateto.
d) los dos catetos.

Dado, entonces, un triángulo rectángulo, para la resolución del mismo, utilizamos las relaciones trigonométricas y el Teorema de Pitágoras.



Relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo

Las razones trigonométricas de un ángulo α son las razones obtenidas entre los tres lados de un triángulo rectángulo.



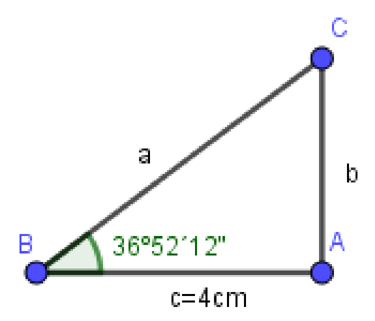
$$sen\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$\tan\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

Ejemplo 1:

Si del triángulo rectángulo de la figura se conocen un cateto y un ángulo agudo.



a) Cálculo de $\hat{C}$:

Los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ son complementarios.

$$\hat{B} + \hat{C} = 90° \qquad \hat{C} = 90° - \hat{B}$$

$\hat{C} = 90° - 36°52´12"$

$\hat{C} = 53°7´48"$

b) Cálculo de la hipotenusa (a):

$$\cos\hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{\cos\hat{B}}$$

$a = \dfrac{4cm}{\cos 36°52´12"} \Rightarrow a = 5\ cm$

b) Cálculo del cateto b:

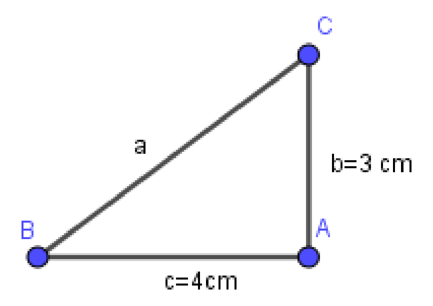
$$tg\,\hat{B} = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot tg\,\hat{B}$$

$b = 4\ cm.0{,}75$

$b = 3\ cm$

Ejemplo 2:

Si del triángulo rectángulo de la figura, se conocen dos de sus catetos.



a) Cálculo de la hipotenusa (a):

Aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = (3\ cm)^2 + (4\ cm)^2$

$a^2 = 9\ cm^2 + 16cm^2$

$a^2 = 25\ cm^2$

$a = 5\ cm$

b) Cálculo de $\hat{B}$:

$tg\ \hat{B} = \frac{b}{c} \Rightarrow tg\ \hat{B} = \frac{3}{4}$

$\hat{B} = arctg\ \frac{3}{4}$

$\hat{B} = 36°52'12"$

c) Cálculo de $\hat{C}$:

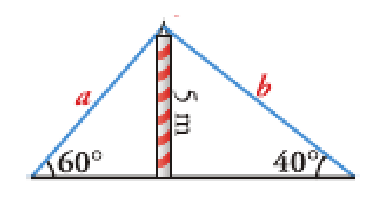
$$\hat{B} + \hat{C} = 90° \qquad \hat{C} = 90° - \hat{B}$$

$\hat{C} = 90° - 36°52'12"$

$\hat{C} = 53°7'48"$

Actividad

1. ¿Cuál es la altura de un edificio si cuando el sol está a 37º sobre el horizonte, arroja una sombra de 60 m?
2. Hallar el área de un triángulo equilátero inscripto en una circunferencia de radio r= 1 m.
3. Durante un aterrizaje, el piloto de un avión debe pasar reglamentariamente 50 m. por encima de una pared de 30 metros de altura y tocar tierra como mínimo a 700 metros de la pared. Hallar el ángulo límite de descenso.
4. Un mástil de 5 metros se ha sujetado al suelo con dos cables: a y b, como muestra la figura:

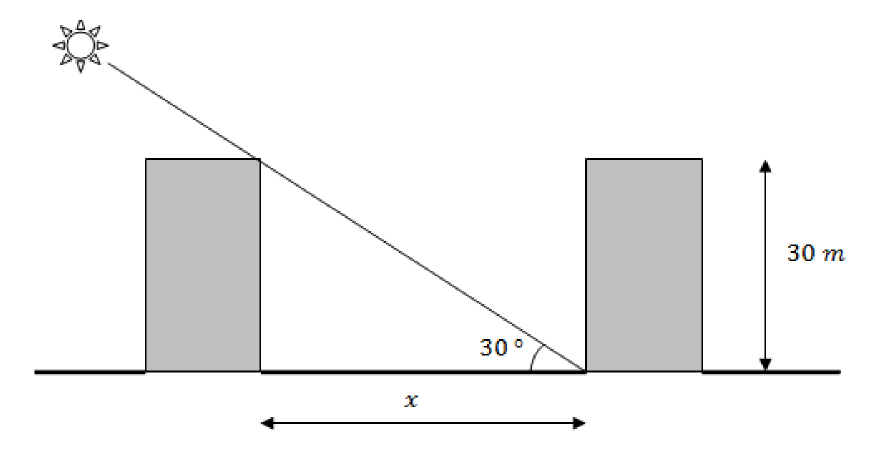


4.1. Calcular la longitud de cada cable.

4.2 ¿Qué distancia separa a los extremos de los cables que tocan el suelo?

5. Hallar la altura de una antena sabiendo que a una distancia de 20 m desde el pie de la antena se observa su extremo superior elevando la visual un ángulo de 25°.
6. Calcular la longitud que debe tener una escalera para que, apoyada en la pared alcance una altura de 2,85 m al formar con el piso un ángulo de 58°
7. Se colocaron 4 alambres de suspensión para una antena de transmisión y cada uno fue sujetado formando un ángulo de 72° con el piso. Si se utilizaron en total 150 m de alambre, ¿cuál es la altura de la antena?
8. La altura desde un departamento hasta la planta baja es de 31,8 m y luego se camina en línea recta 300 m hasta un puesto de revistas. ¿Con qué ángulo de depresión se observa el puesto desde la ventana del departamento?
9. Una aerosilla de 756 m de largo sube esquiadores a una montaña hasta una altura de 238 m. ¿Cuál es el ángulo de elevación de la aerosilla?
10. Desde la terraza de un edificio, se observa, con un ángulo de depresión de 15°, un automóvil que se encuentra a 200 m del pie del edifico. ¿A qué altura se encuentra la terraza?

11. A qué distancia deben ubicarse dos cuerpos de edificios de 30 metros de altura, para que la sombra que arroja uno de ellos llegue al pie del otro cuerpo cuando el sol está a 30º sobre el horizonte.



12. Los planos límites de fachadas según el Código de Edificación son:

Hasta 12 m. de altura, coincidente con la Línea Municipal.

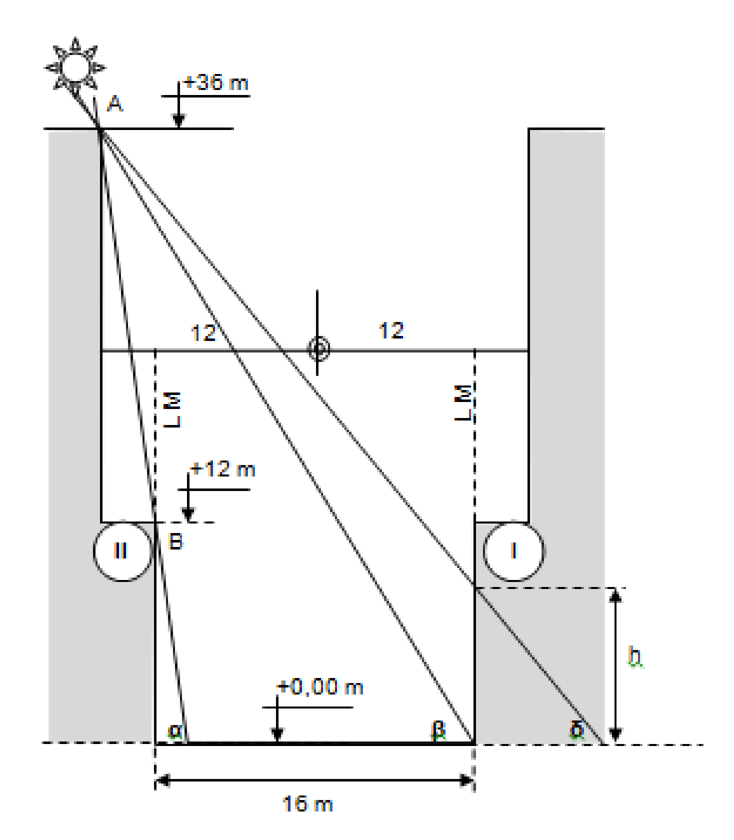
De 12 a 36 m. de altura, paralelo a la Línea Municipal, a 12 m. del eje de la calzada.

Para el caso particular de una calle de 16 m. de ancho:

¿Cuál es el ángulo α formado por el rayo del sol rasante a los puntos A y B, con la horizontal?

¿Cuál es el ángulo β, que marca la altura del sol sobre el horizonte, cuando la sombra arrojada por el edificio I, alcanza el pie del edificio II?

¿Cuál será la altura h de la sombra arrojada por el edificio I cuando el sol está a un ángulo $\delta = 55°$ sobre el horizonte?



13. Para la latitud de nuestra ciudad, la altura del sol al pasar por el meridiano del lugar (mediodía), en los equinoccios y solsticios es:

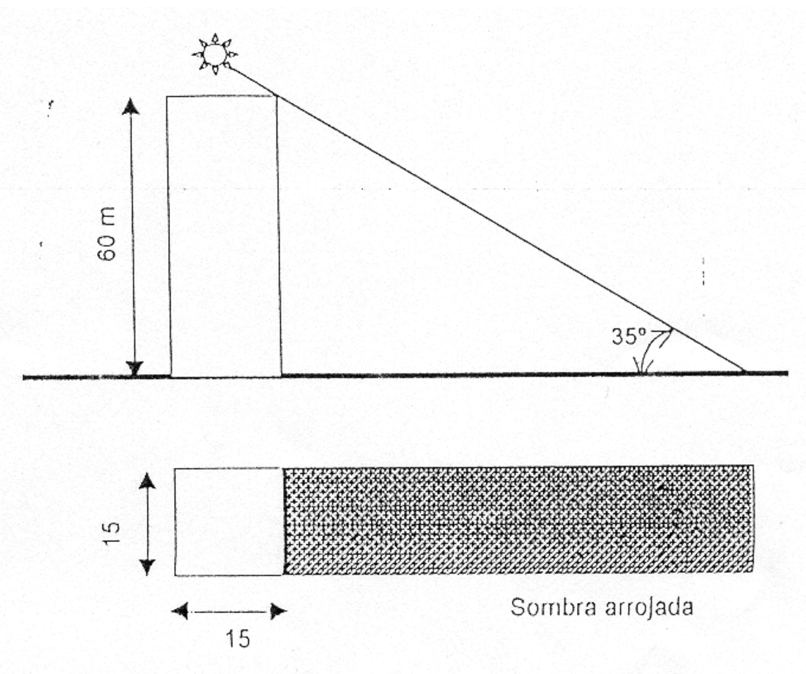
21 de junio (invierno)	30º
21 de setiembre – 21 de marzo (primavera - otoño)	55º
21 de diciembre (verano)	80º

13.1 Calcular la sombra arrojada, en cada una de esas fechas, por un edificio torre de planta cuadrada de 15 m. x 15 m. y de 60 m. de altura.

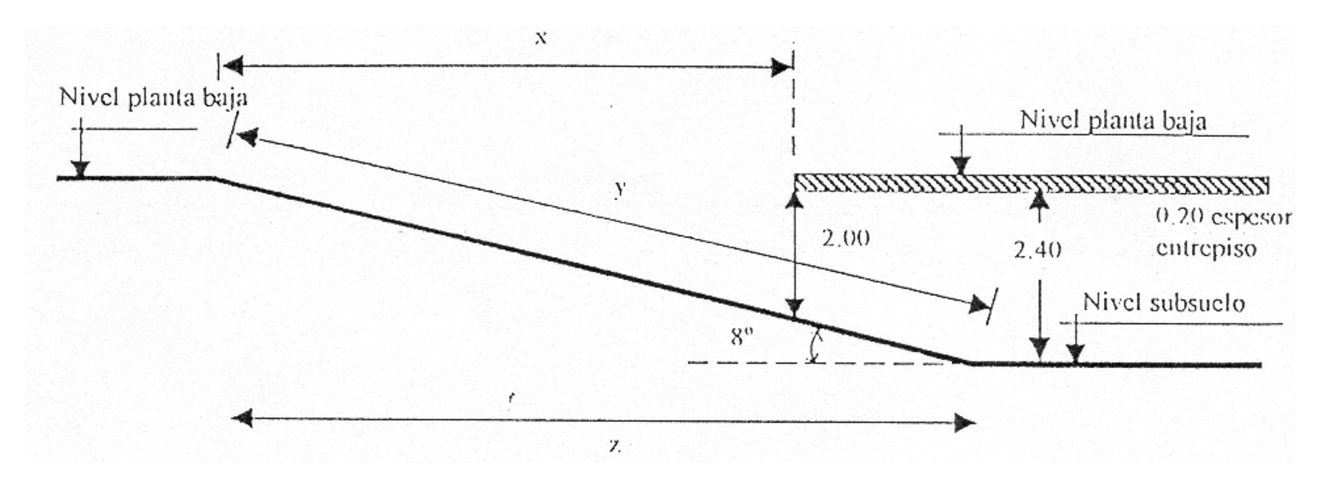
13.2. Calcular la penetración del sol, en cada una de esas fechas, en un local de planta rectangular de 5 m. x 10 m., con una pared totalmente vidriada al Norte, en su lado menor. Altura libre del local: 3,00 m. Graficar.

13.3. Para el mismo caso anterior, calcular la medida del alero necesario, sobre la pared vidriada, para que el sol no penetre en la habitación el 21 de diciembre.

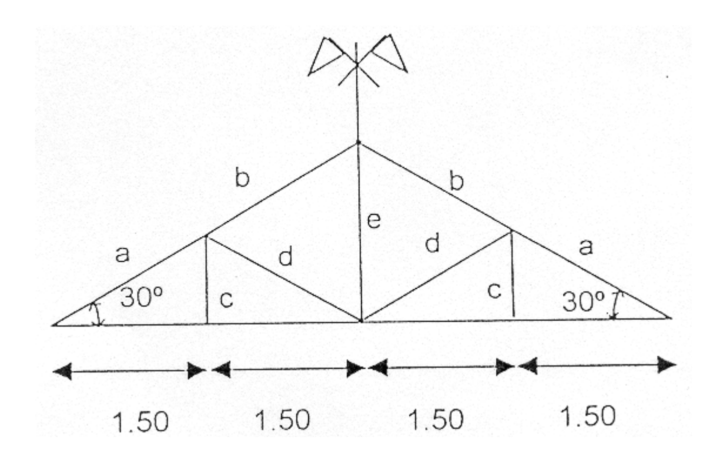
Gráfico para el caso 13.1



14. Una rampa de acceso a un subsuelo desde planta baja, tiene las características y datos indicados en el corte. Calcular x, y, z.



15. Calcular la longitud de las barras a, b, c, d, e de la estructura reticulada dibujada.



Bibliografia

LOPEZ, Carlos – GONZALVO, Carlos. (2008). Apunte de Cátedra. Taller Vertical II de matemática.

CAPÍTULO 2
Funciones

Stella Maris Arrarás y Viviana Cappello

Dados dos conjuntos A y B, (el A recibe el nombre de conjunto de partida y el B conjunto de llegada), una función f de A en B, es una correspondencia, regla, o relación que asigna a cada elemento x de A **exactamente un elemento** en el conjunto B, que indicaremos con **f(x).**

De acuerdo con la definición deben cumplirse dos condiciones:

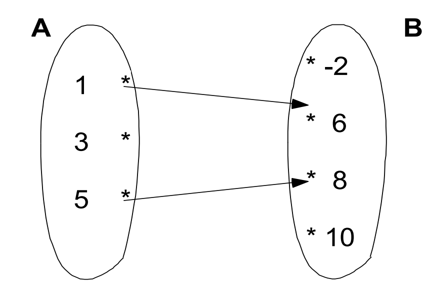
- **EXISTENCIA:** Para todo elemento **a** de **A**, deber existir un elemento b de B que le corresponda.
- **UNICIDAD:** Ese elemento **b** de **B**, debe ser el único que le corresponda a **a**.

Si se considera una función **f : A→ B** y se sabe que un par de valores **(x , y)** satisface esa relación funcional, se escribe:

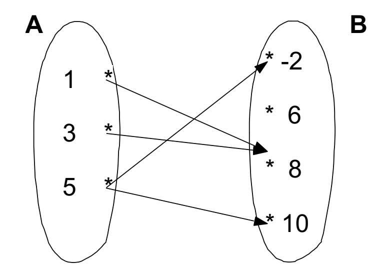
y = f(x) que se lee " **y** igual a **f de x**".

donde **x** representa la variable independiente e **y** la variable dependiente.

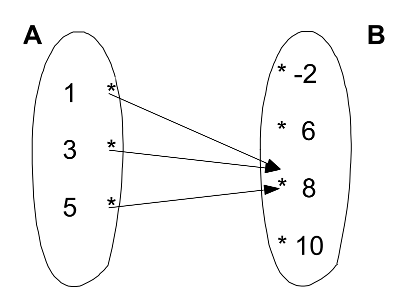
Por ejemplo, la relación representada por el diagrama de Venn no es función ya que el elemento 3 perteneciente a A no está relacionado con elemento alguno del conjunto B (no se verifica la condición de existencia).



Por ejemplo, la relación representada en el diagrama de Venn de la figura tampoco es una función ya que no cumple la condición de unicidad; (del elemento 5 de A parten dos flechas).



Por ejemplo, la relación de la figura es función ya que se cumplen las dos condiciones establecidas: existencia y unicidad. Dicho de otro modo, una relación es funcional si de cada elemento del conjunto **A** de partida **sale una y solo una flecha**.



Del análisis de los ejemplos precedentes, se concluye que para decidir si una relación establecida entre los elementos de dos conjuntos (iguales o distintos) es una función, basta con observar el conjunto de partida.



Dominio e imagen de una función

El dominio de una función es el conjunto de valores para los cuales tiene sentido la expresión matemática que define la función; es decir, son todos los valores que puede tomar la variable independiente, **x**.

Por ejemplo, la función $f(x) = 3x^2 - 5x$ está definida para todo número real (x puede ser cualquier número real). Así el dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales.

En cambio, la función $f(x) = \frac{2x^2+3}{x+2}$, tiene como dominio todos los valores de x distintos de -2, ya que x + 2 debe ser distinto de cero.

En el caso de la función $f(x) = \sqrt{x+3}$, el dominio de esta función son todos los números reales mayores o iguales a –3, ya que *x* + 3 debe ser mayor o igual que cero para que exista la raíz cuadrada.

La imagen de una función son los valores que se obtienen al reemplazar x por los valores del dominio.

Por ejemplo en $f(x) = \sqrt{x-2}$, como la función tiene radicales el dominio está conformado por todos los valores para los cuales $x - 2 \geq 0$. Esto es, el dominio de la función incluye todos los reales que son mayores o iguales a 2.

La imagen es igual al conjunto de los números reales positivos incluyendo el cero; ya que al reemplazar los valores del dominio se obtienen únicamente valores positivos bajo la función *f.*

Representación de funciones

Funciones numéricas

Las funciones de uso más frecuente son las denominadas funciones numéricas, en las que el DOMINIO (coincidente con el conjunto de partida) y la IMAGEN (que puede coincidir con el conjunto de llegada o ser un subconjunto del mismo) son conjuntos numéricos (iguales o distintos); en este tipo de funciones la imagen que corresponde a cada elemento del dominio puede llegar a ser en algunos casos determinada mediante una fórmula.

Ejemplo 1:

La longitud de una circunferencia depende de su radio (la longitud es función del radio).

$$l = 2\,\pi\, r \qquad \text{o sea } \; l = f(r).$$

Ejemplo 2:

La aceleración que adquiere un punto material, depende de la fuerza aplicada y de la masa de dicho punto.

$$a = \frac{f}{m} \qquad \text{o sea } \; a = g\,(f, m)$$

Ejemplo 3:

El volumen de un paralelepípedo recto rectangular depende de la longitud de sus aristas.

$V = a \bullet b \bullet h$

o sea $V = f\,(a, b, h)$

h

b

a

En el ejemplo 1 vemos que a cada valor del radio **r** (variable independiente) le corresponde un valor de la longitud **l** de la circunferencia (variable dependiente), mientras que en el ejemplo 2 la aceleración **a** es función de dos variables independientes (la fuerza **f** y la masa **m**) y en el ejemplo 3 el volumen **V** es una función de tres variables independientes **a**, **b** y **h**.

Sea $f : Z \rightarrow Z \,/\, f_{(x)} = 2x - 1$

La expresión simbólica precedente trata de una función **f** en la cual tanto el dominio *(conjunto de partida)* como el conjunto de llegada es el conjunto Z; la función es tal que, a cada elemento **x** del dominio le corresponde como imagen su valor multiplicado por 2, restándole luego 1; dicho de otra forma la función **f** transforma a cada elemento **x** del dominio **Z** en su duplo disminuido en una unidad.

Si nos interesa hallar el valor que toma la función para x = 2 o sea, si queremos calcular f(2**)** (se lee f de 2), hacemos:

$$f(2) = 2 \bullet 2 - 1 = 3.$$

y decimos que 3 es la imagen de 2.

Para efectuar la representación cartesiana de f, observemos primero que su gráfica tiene infinitos elementos *(ya que el dominio Z los tiene)* y por lo tanto solo podría efectuarse una representación parcial. Para ello tomamos un par de ejes, ubicando sobre el de abscisa *(eje horizontal)* los valores que corresponden al conjunto de partida y sobre el de ordenadas los elementos del conjunto de llegada *(del cual recordemos, de acuerdo con la convención que hemos adoptado la imagen es un subconjunto).* Determinamos a continuación las imágenes de algunos elementos del dominio:

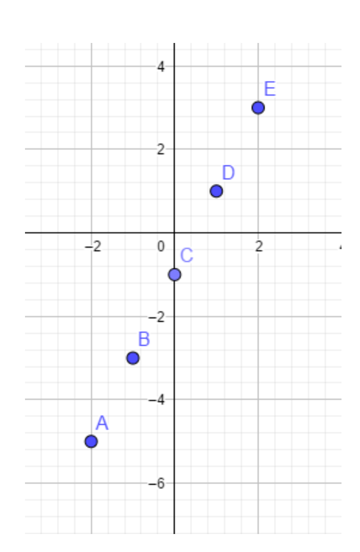
$f(-2) = 2 \bullet (-2) - 1 = -5$

$f(-1) = 2 \bullet (-1) - 1 = -3$

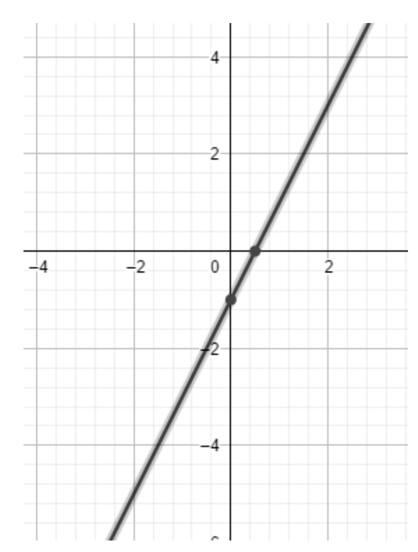
$f(0) = 2 \bullet (0) - 1 = -1$

$f(1) = 2 \bullet (1) - 1 = 1$

$f(2) = 2 \bullet (2) - 1 = 3$

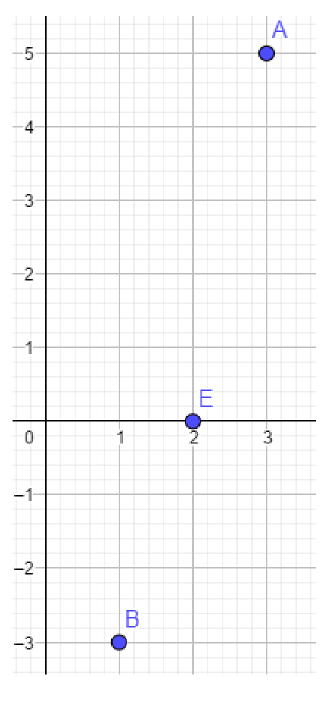


Observación: La representación cartesiana queda así terminada. Se advierte que no corresponde unir entre sí los puntos obtenidos, ya que se trata de una función de Z en Z, lo que significa que para los reales no enteros la función no está definida.



Sea ahora f: R → R / $f_{(x)}$ = 2x – 1 observamos que la ley o fórmula que relaciona elementos del dominio con sus imágenes es la misma que en el ejemplo anterior, pero en este caso, la función es de R en R y su representación cartesiana es una línea continua.

Sea f: N → Z /$f_{(x)}$ = x^2 - 4



Para los elementos 1,2 y 3 del dominio N, las imágenes son:

f(1) = -3
f(2) = 0
f(3) = 5

Vemos que para x = 2, el valor de la función es f(2) = 0;
en este caso decimos que x = 2 es un cero de la función.

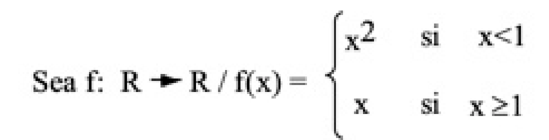
Sea f: R → R / $f_{(x)} = \dfrac{x+1}{x-2}$ verificamos que para x = 2, f(2) no existe *(ya que no es posible la división por cero),* resultando entonces que f(x) así definida no es función de R en R, ya que el elemento 2 perteneciente a R no tiene imagen al aplicar la fórmula.

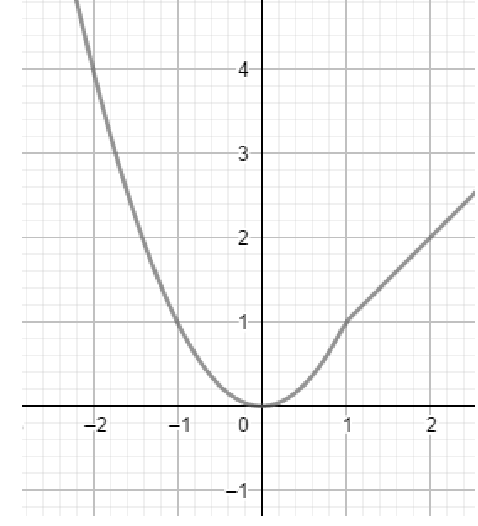
Si queremos hallar el Dominio para el cual tiene validez la fórmula, el mismo resultará ser aquel conjunto cuyos elementos no anulen el denominador, vale decir, en nuestro caso:

$$Dom\ f(x) = R - \{2\}.$$

Convenimos entonces, que el **DOMINIO** de una función real es el subconjunto más amplio posible de los números reales para el cual tiene sentido aritmético la fórmula utilizada para definirla.

Una función puede expresarse por más de una fórmula matemática:





En este caso, las imágenes deberán obtenerse, empleando dos fórmulas distintas: para x ∈ (-∞, 1) la fórmula a aplicar es f(x) = x^2, y para x ∈ [1, +∞) aplicaremos f(x) = x, resultando:

$f_{(-3)} = (-3)^2 = 9$

$f_{(-2)} = (-2)^2 = 4$

$f_{(-1)} = (-1)^2 = 1$

$f_{(0)} = 0$

$f_{(1)} = 1$

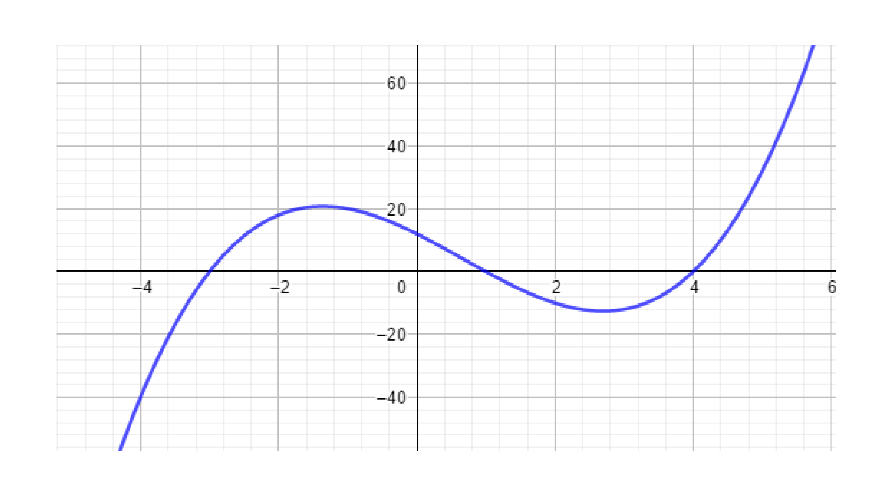
$f_{(2)} = 2$

Funciones polinómicas

Una función del tipo: $f : R \rightarrow R /\ f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ en la que los segundos miembros de las fórmulas correspondientes son polinomios en una variable, se denominan funciones polinómicas.

Sea f: R → R / f(x) = $x^3 - 2x^2 - 11x + 12$ para efectuar la representación cartesiana, confeccionamos una tabla a simple entrada o cuadro de valores.

x	f(x)
-4	-40
-3	0
-2	18
-1	20
0	12
1	0
2	-10
3	-12
4	0
5	32

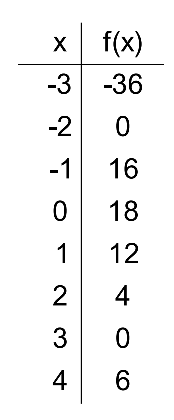


Resulta importante conocer cuáles son los **ceros** de la función *(abscisas de los puntos en que la curva corta al eje x)*; recordemos que por ser el polinomio de grado 3 deben existir tres ceros "reales o no"; en nuestro caso los pares son (-3,0); (1,0) y (4,0). Interesa además identificar el punto en que la curva corta al eje de las ordenadas, o sea el par (0, f(0)); para nuestro ejemplo el par es (0,12).

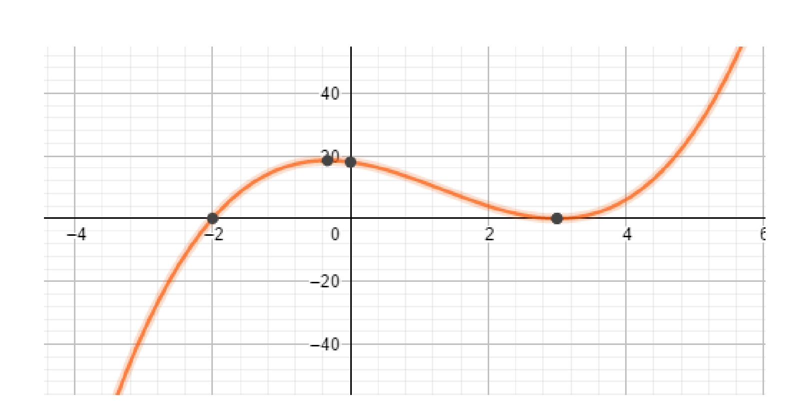
Conocidos los ceros de la función, la misma puede expresarse:

$$f : R \rightarrow R \,/ f(x) = (x + 3) \bullet (x - 1) \bullet (x - 4).$$

Sea $f: R \rightarrow R \,/\, f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$



x	f(x)
-3	-36
-2	0
-1	16
0	18
1	12
2	4
3	0
4	6



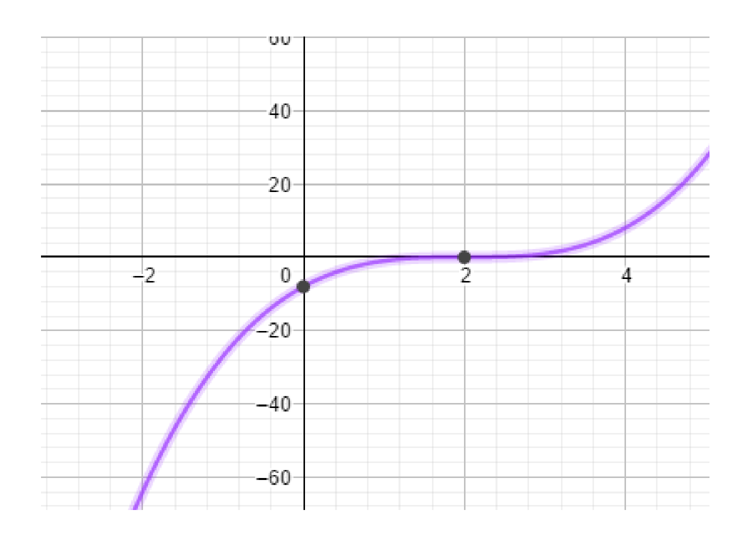
Los puntos (-2,0) y (3,0) son las intersecciones de la curva que representa la función con el eje de abscisas y el par (0,18) es la intersección con el eje de ordenadas.

La curva resulta tangente al eje horizontal en el punto (3,0) debido a que 3 es una raíz de multiplicidad par (raíz doble). Conocidas las raíces, la función puede expresarse:

$$f : R \rightarrow R \,/\, f(x) = (x + 2) \bullet (x - 3)^2$$

Sea $f: R \rightarrow R \,/\, f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

x	f(x)
-1	-27
0	-8
1	-1
2	0
3	1
4	8



Puede demostrarse que por ser 2 una raíz triple *(multiplicidad tres)* la curva es tangente al eje de abscisas en (2,0) y además en ese punto lo corta, la función puede expresarse:

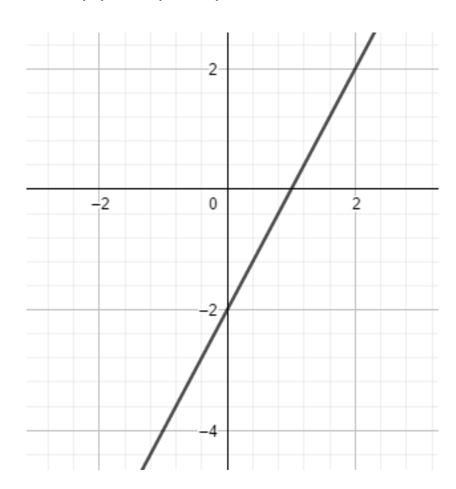
$$f : R \rightarrow R \ / \ f(x) = (x - 2)^3$$

Función lineal

Sea $f: R \rightarrow R \ / \ f(x) = a\,x + b$ con $a \neq 0$, como el polinomio del segundo miembro de la fórmula que define la función es de primer grado, a esta función se la denomina función lineal. El lugar geométrico correspondiente es una recta.

Sea $f: R \rightarrow R \ / \ f(x) = 2x – 2$ o bien $f: R \rightarrow R \ / \ f(x) = 2(x - 1)$

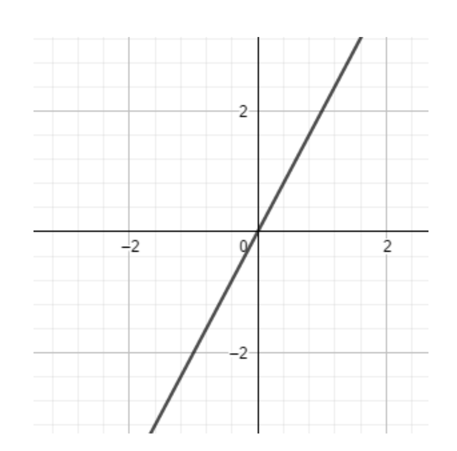
x	f(x)
-3	-8
-2	-6
-1	-4
0	-2
1	0
2	2
3	4



La intersección de la recta con el eje de abscisas se denomina **abscisa al origen** y es para nuestro ejemplo la primera componente del par (1,0). La intersección con el eje de ordenadas se denomina **ordenada al origen**: en nuestro caso la segunda componente del par (0,-2). La ordenada al origen es el término independiente a_0 de la fórmula que define la función. Salvo en el caso en que la recta pase por el origen (ejemplo siguiente), para trazarla es suficiente conocer la abscisa y la ordenada al origen.

Sea $f: R \rightarrow R \ / \ f(x) = 2x$

x	f(x)
-1	-2
0	0
1	2

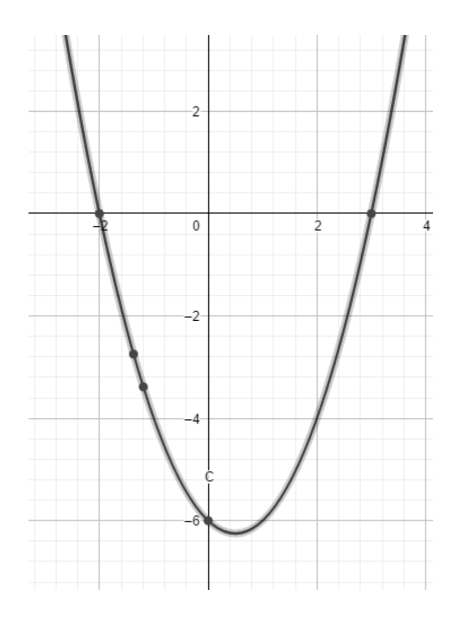


Función cuadrática

Si f: R → R / f(x) = a x^2 + b x + c con a ≠ 0, la función se denomina función cuadrática: siendo su lugar geométrico una parábola.

Sea f: R → R / f(x) = x^2 - x - 6

x	f(x)
-3	6
-2	0
-1	-4
0	-6
1	-6
2	-4
3	0
4	6



Los ceros de la función son -2 y 3 y resultando la intersección con el eje de abscisas los pares (-2,0) y (3,0) y la intersección con el eje de ordenadas, el par (0,-6).

Observando el cuadro de valores vemos que existen elementos pertenecientes al dominio de la función que tienen la misma imagen, o sea, existen pares ordenados que pertenecen al lugar geométrico con la misma segunda componente: (-3,6) y (4,6); (-2,0) y (3,0); (-1,-4) y (2,-4); (0,-6) y (1,-6); esto significa que la **parábola** presenta **un eje de simetría** (en nuestro caso una recta paralela al eje vertical). Para ubicar la posición del eje de simetría, se toma cualquier conjunto de pares ordenados de igual segunda componente y se efectúa la semisuma de las primeras componentes: se halla de esta forma el punto medio.
Por ejemplo para los pares (-3, 6) y (4, 6)

$$x = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2}$$

El eje de simetría resulta ser el conjunto de puntos {(x,y) / x = ½ } que corresponde a una recta paralela al eje vertical, que pasa por el punto de abscisa ½ .

La intersección de la parábola con el eje de simetría se denomina **vértice**; en nuestro caso la abscisa es x = ½ y la correspondiente ordenada será:

$$f(1/2) = -\frac{25}{4}$$

El vértice es entonces el punto $(\frac{1}{2};-\frac{25}{4})$ la parábola es cóncava hacia las **y** positivas, debido a que el coeficiente principal es positivo.

Por ser los ceros de la función -2 y 3, la misma puede expresarse:

$$f : R \rightarrow R \;/\; f(x) = (x + 2) \bullet (x - 3)$$

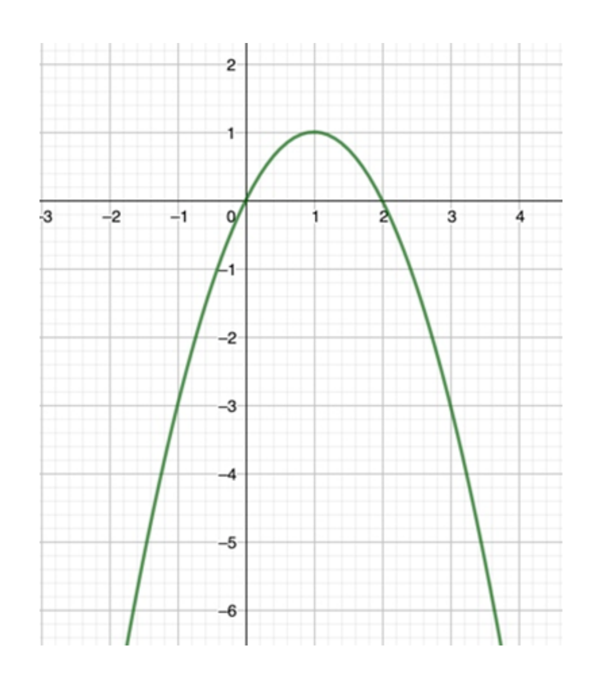
dichos ceros fueros obtenidos del cuadro de valores confeccionado para dibujar la parábola; otro método útil consiste en hallar las raíces de la ecuación de 2do. grado *(polinomio de 2do. grado igualado a cero)* y escribir luego la denominada forma factorial

$$f(x) = a\,(x - x_1) \bullet (x - x_2)$$

donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación.

Sea $f: R \rightarrow R \;/\; f(x) = -x^2 + 2x$

x	f(x)
-2	8
-1	-3
0	0
1	1
2	0
3	-3
4	-8



los ceros de la función son 0 y 2 y por lo tanto la curva corta al eje de abscisas en (0,0) y (2,0) y al eje de ordenadas en (0,0). El eje de simetría se obtiene, como en el ejemplo anterior, tomando un conjunto de pares ordenados de igual segunda componente y realizando la semisuma de las primeras componentes: para el conjunto {(-2,-8) ; (4,-8)} obtenemos

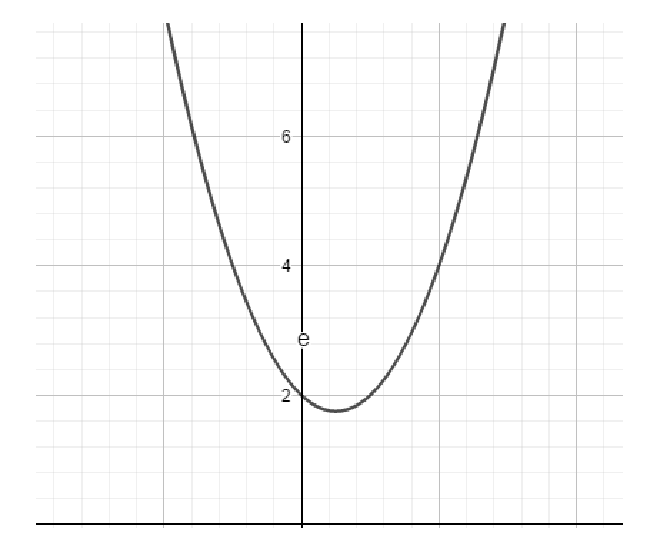
$$x = \frac{-2+4}{2} = 1$$

El vértice es el punto (1,f(1)) o sea V = (1,1), La parábola es cóncava hacia abajo y ello se debe a que el coeficiente del término cuadrático es negativo.

Puede escribirse, conociendo las raíces: $f : R \rightarrow R \;/\; f(x) = -x \bullet (x - 2)$.

Sea f: R → R / f(x) = x^2 - x + 2

x	f(x)
-2	8
-1	4
0	2
1	2
2	4
3	8



Obtención del eje de simetría:

de {(-2,8);(3,8)} $x = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$

$$f(1/2) = \frac{7}{4}$$

Resultando el V = $\left(\frac{1}{2};\frac{7}{4}\right)$ no existen ceros reales de la función; geométricamente ello implica que la parábola no corta al eje de abscisas; además es cóncava hacia arriba ya que el coeficiente principal de la fórmula que define la función es positivo.

Funciones racionales

Sea $f: R - A \rightarrow R /\ f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad Q(x) \neq 0$

el segundo miembro de la fórmula que define la función está formado por:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0$$

El **dominio de la función R – A** es el conjunto de los reales, excluidas las raíces de Q(x) cuyo conjunto denominamos **A**.

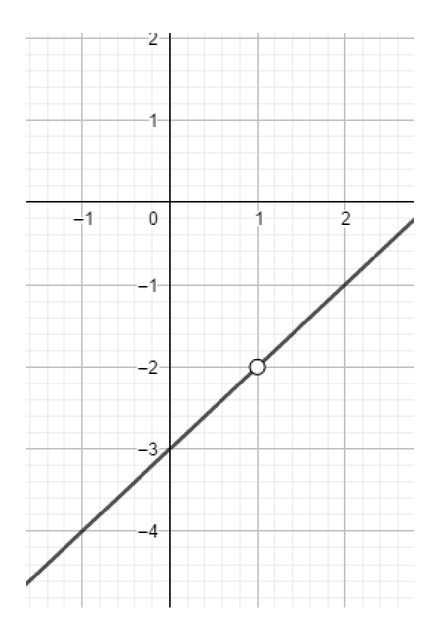
Sea $f: R - \{1\} \rightarrow R /\ f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$ si el numerador y el denominador tienen factores comunes; en nuestro caso:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1) \bullet (x - 3)$$

podemos escribir:

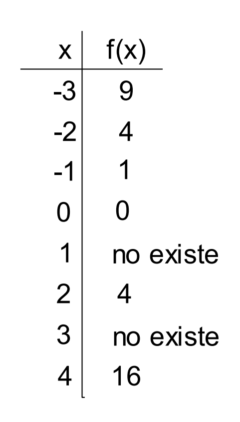
$$f: R - \{1\} \rightarrow R /\ f(x) = x - 3$$

x	f(x)
-1	-4
0	-3
1	no existe
2	-1
3	0
4	1

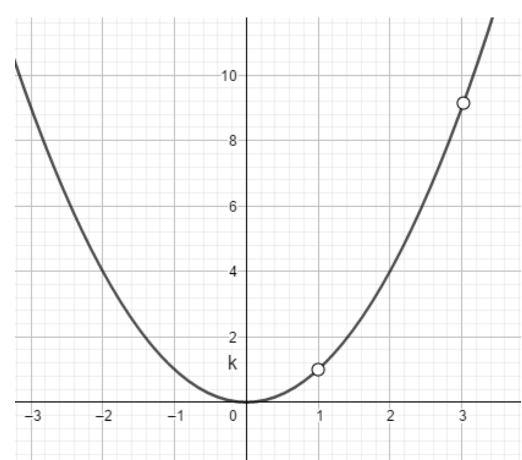


A la recta le falta un punto en (1,-2) ya que x = 1 no pertenece al dominio de la función.

Sea $f : R - \{1,3\} \rightarrow R \;/\; f(x) = \dfrac{x^4 - 4\,x^3 + 3\,x^2}{x^2 - 4\,x + 3}$ cuya fórmula puede factorearse de modo tal que sea $f : R - \{1,3\} \rightarrow R \;/\; f(x) = \dfrac{x^2\,(x-1)\,(x-3)}{(x-1)\,(x-3)}$ resultando f : R - {1,3} → R / f(x) = x^2



x	f(x)
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	no existe
2	4
3	no existe
4	16



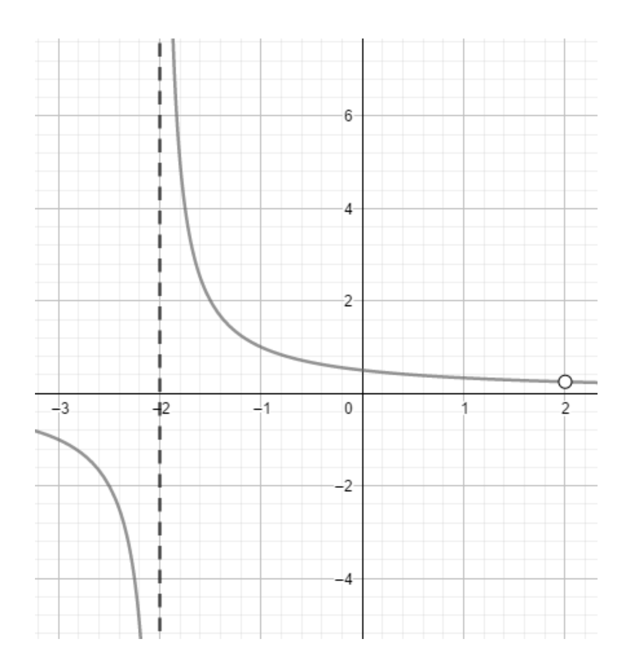
A la parábola le faltan dos puntos en (1,1) y en (3,9), ya que los elementos 1 y 3 no pertenecen al dominio de la función.

Sea $f : R - \{-2,2\} \rightarrow R \;/\; f(x) = \dfrac{x-2}{x^2 - 4}$

o sea $f : R - \{-2,2\} \rightarrow R \;/\; f(x) = \dfrac{x-2}{(x-2)\,(x+2)}$

$$f : R - \{-2,2\} \rightarrow R \;/\; f(x) = \frac{1}{(x+2)}$$

x	f(x)
-8	-1/6
-6	-1/4
-4	-1/2
-2	no existe
0	1/2
2	no existe
4	1/6



los puntos de abscisas - 2 y 2 no pertenecen al lugar geométrico ya que - 2 y 2 no pertenecen al dominio de la función.

Funciones estrictamente crecientes y estrictamente decrecientes

Decimos que **f** es una función **creciente** si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Con idéntico razonamiento **f** será una función **decreciente** si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Funciones trigonométricas

Dibujando una circunferencia de radio unitario, denominada circunferencia trigonométrica, una línea permite definir las distintas relaciones trigonométricas:

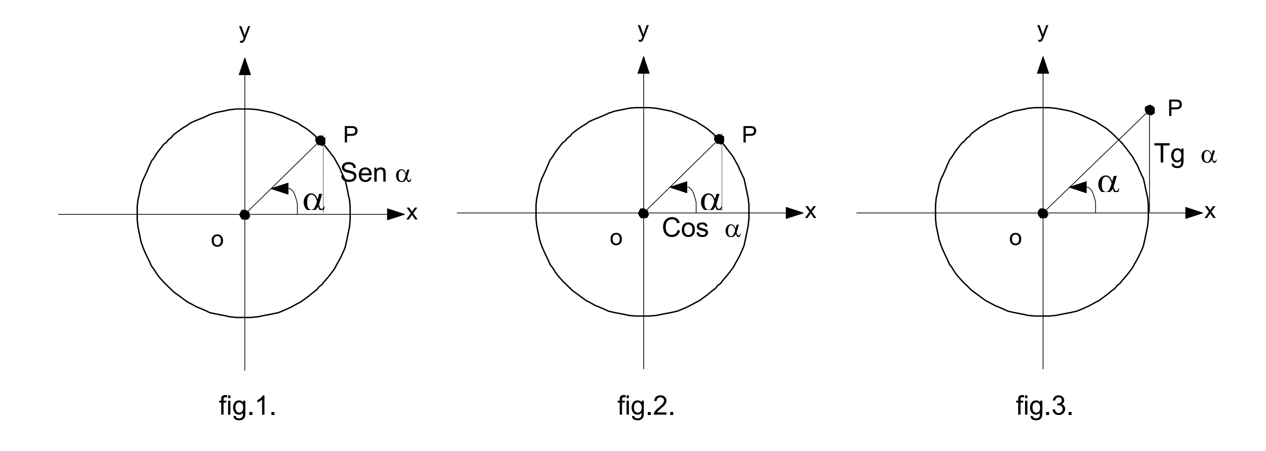


fig.1. fig.2. fig.3.

Cuando el lado terminal OP del ángulo efectúa un giro completo, el punto P vuelve a ocupar la posición sobre el plano; esto significa que la ordenada de P (fig.1) por ejemplo, no es sólo el seno del ángulo α sino además de todos los ángulos $\alpha + 2k\pi; \quad con \quad k \in Z.$

Podemos escribir entonces:

$$\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ (\alpha + 2\ k\ \pi)\ ;\ \ k \in Z$$

y con análogo razonamiento: $\cos \alpha = \cos (\alpha + 2\ k\ \pi)\ ;\ \ k \in Z$

Las funciones que tienen la propiedad de repetir sus valores a intervalos iguales reciben el nombre de **funciones periódicas**, denominándose período al intervalo para el cual se repiten dichos valores. Las funciones **seno** y **coseno** son periódicas y de período **2π**. En cambio para la **tangente**, los valores de la función se repiten cuando avanzamos (sentido antihorario) o retrocedemos un ángulo π; resultando: $\text{tg}\ \alpha = \text{tg}\ (\alpha + k\ \pi)\ \ ;\ \ k \in Z$

Decimos que la **tangente** es de período **π.**

Gráficas de las funciones trigonométricas

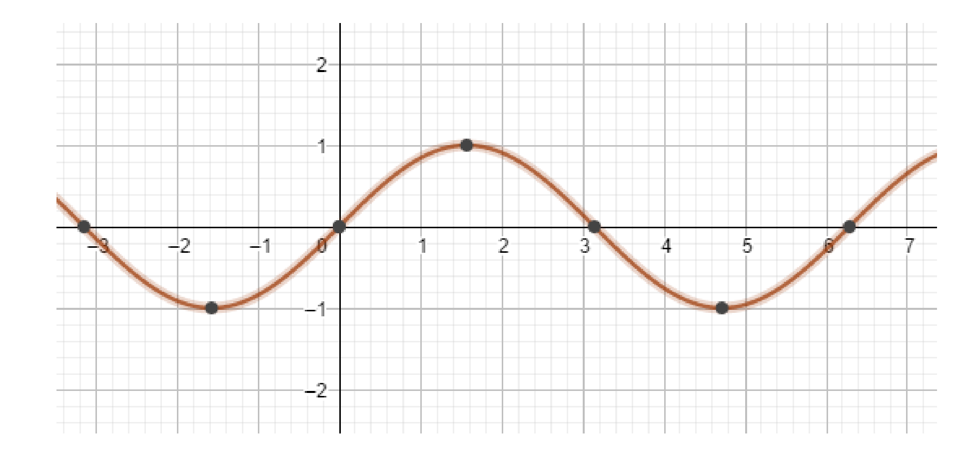
Para efectuar la representación cartesiana, utilizaremos los ángulos expresados en radianes (ver fórmulas de conversión), aplicando los conceptos de Dominio e Imagen de las funciones trigonométricas.

Gráfica de la función: **y = sen x**.

Dom [sen x] = R ; Im [sen x] = [-1,1] Periodicidad : 2 π.

Recordando que: $$\alpha^r = \frac{\pi}{180^o} \bullet \alpha^o$$

Se obtiene una curva llamada **SINUSOIDE**.

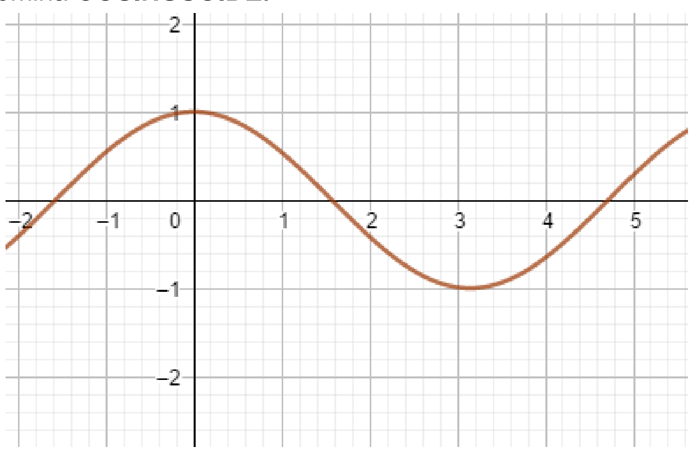


La periodicidad de la función trigonométrica permite extender la gráfica, repitiéndola a lo largo del eje de las abscisas. Con igual criterio construimos las gráficas de las demás funciones:

Gráfica de la función: y = cos x

Dom [cos x] = R; Im [cos x] = [-1,1] Periodicidad : 2 π.

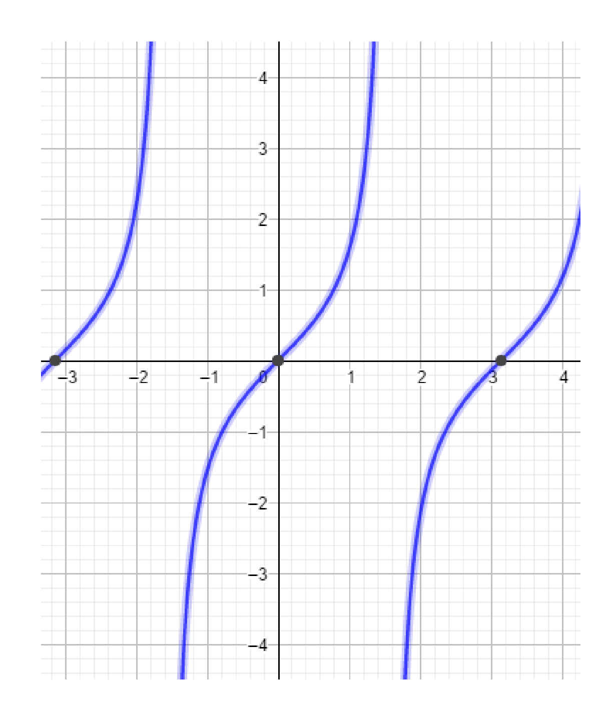
La curva se denomina **COSINUSOIDE**.



Gráfica de la función: y = tg x

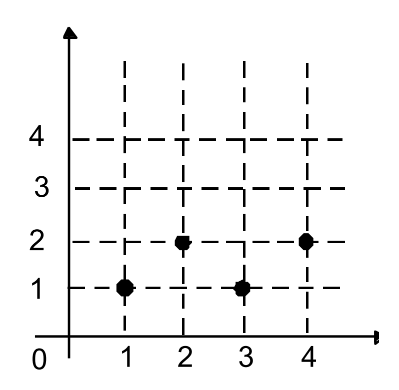
Dom [tg x] = { x ∈ R x = (π/2 + n π ∧ n ∈ Z } Im [tg x] = R

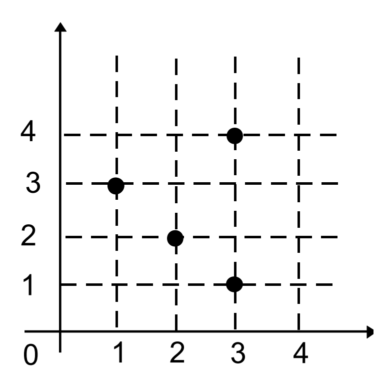
Periodicidad : π.

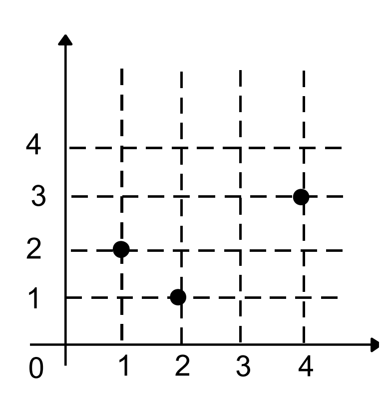


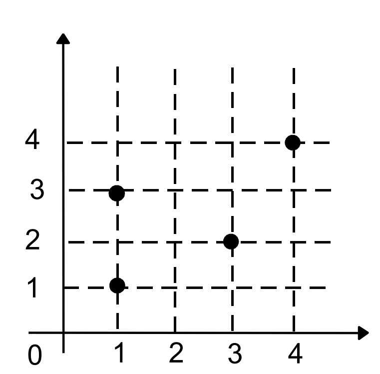
Actividad

1. Sea, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ determinar si los conjuntos de puntos que se indican en los siguientes diagramas representan funciones $f : A \to A$. Justificar.









2 Representar gráficamente las siguientes funciones, indicando en cada caso, si existen, las intersecciones con los ejes coordenados.

2.1 f : A $\to$ B / $f_{(x)} = (x^2/2) + 1$; si A = $\{0, 2, \sqrt{8}, \sqrt{12}\}$; B = {1,3,5,7}

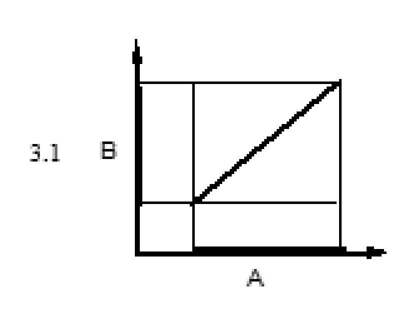
2.2 f : A $\to$ B / $f_{(x)} = \dfrac{1}{x-2}$; si A = {-2 ; -1 ; 0 ; 1} B = {-1 ; -1/2 ; -1/3 ; -1/4 ; 0}

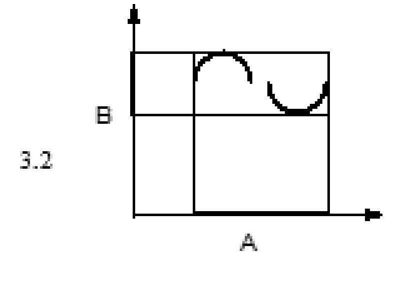
2.3 f : R $\to$ R / $f_{(x)} = 2x - 3$

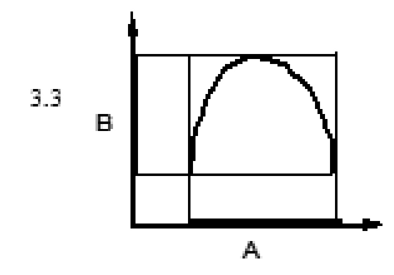
2.4 f : R $\to$ R / $f_{(x)} = -x^2 + 3$

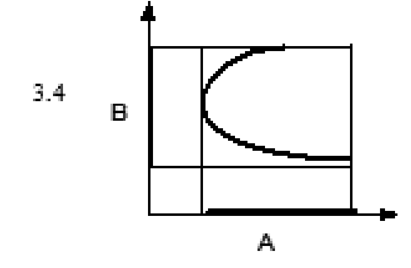
2.5 f : R $\to$ R / $f_{(x)} = x^2 + x - 3$

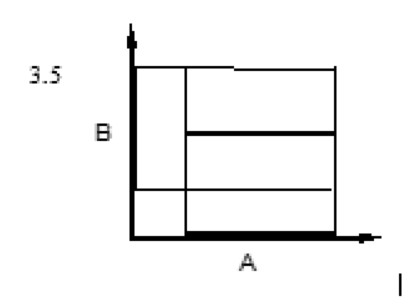
3 Determinar si las siguientes representaciones cartesianas corresponden o no a funciones definidas de A en B justificando la respuestas.

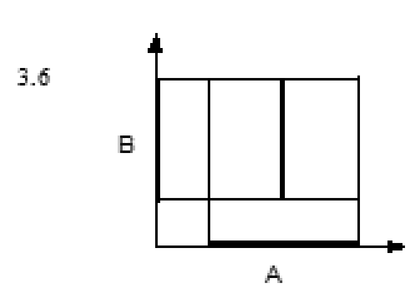




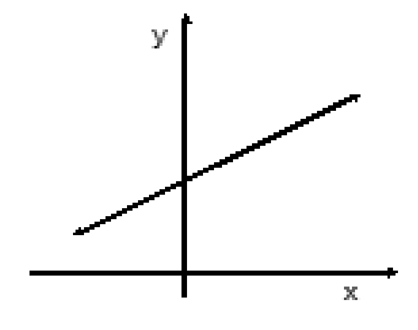


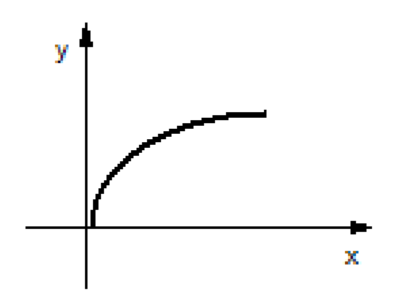


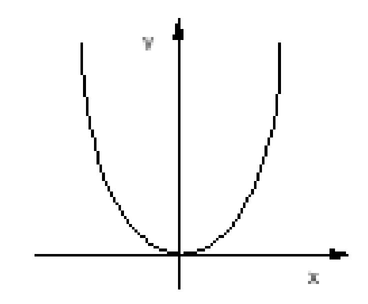


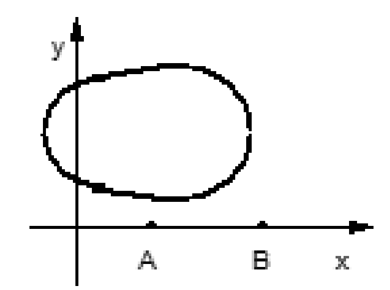


4. Decidir y justificar si las siguientes gráficas corresponden o no a funciones definidas de R en R.









5. Dadas las siguientes funciones Reales, calcular el correspondiente dominio A:

5.1 $f : A \to B \,/\, f_{(x)} = \dfrac{1}{x^2}$

5.2 $f : A \to B \,/\, f_{(x)} = \dfrac{1}{-x+4}$

5.3 $f : A \to B \,/\, f_{(x)} = \dfrac{x-1}{x^2+1}$

5.4 $f : A \to B \,/\, f_{(x)} = \dfrac{\sqrt{x}}{-x+1}$

6. Representar en un mismo gráfico las siguientes funciones de R en R:

6.1 $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ f(x) = x^2 + 1 \\ f(x) = x^2 - 2 \end{cases}$

6.2 $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ f(x) = 2x^2 \\ f(x) = 3x^2 \end{cases}$

6.3 $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ f(x) = -x^2 \\ f(x) = -x^2 + 2 \\ f(x) = -x^2 - 1 \end{cases}$

6.4 $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ f(x) = (x-1)^2 \\ f(x) = (x+1)^2 \end{cases}$

¿Qué observaciones puede hacer de cada grupo de funciones?

7. Escribir una función f, tal que:

7.1 tenga sus ceros en x = - 3 y x = 2

7.2 tenga sus ceros en -3 y 1

7.3 esté definida para todos lo reales, excepto para x = 2.

7.4 esté definida en todos los reales, excepto en -3 y -2.

7.5 tenga ceros en -3 y 0 y esté definida para todos los reales con excepción de 1 y -2

8.- Graficar las siguientes funciones:

8.1 $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 7 - 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

8.2 $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq -2 \\ 3 - x & \text{si } x > -2 \end{cases}$

8.3 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

9.- Escribir y graficar una función que represente la situación "Por cada tonelada de hormigón se pagarán $1500, siempre que no exceda de 5 toneladas. El costo del flete es de $ 2000 sin importar la carga".

10.- Un termostato controlado eléctricamente está programado para hacer descender la temperatura de una casa en forma automática durante la noche.

Si se lo programa para que entre las 21 hs y las 6 de la mañana la temperatura sea de 18°C; entre las 9 hs y las 18 hs sea de 22°C y si la temperatura se modifica en forma lineal entre las 6 hs y las 9 hs y entre las 18 hs y las 21 hs.

10.1 Represente este fenómeno en un sistema de ejes cartesianos ortogonales entre la hora 0 y la hora 24 hs.

10.2 Supongamos ahora que queremos reprogramar el termostato para producir una temperatura $H(t) = T(t - 1)$. ¿Cómo cambiaría la temperatura de la casa?

10.3 Si se programara el termostato para producir una temperatura $H(t) = T(t) + 1$ ¿Cómo cambiaría esto la temperatura de la casa?

Bibliografía

LOPEZ, Carlos – GONZALVO, Carlos. (2008). Apunte de Cátedra. Taller Vertical II de matemática.
GARCÌA NILDA (2017) Apuntes de Clase. Análisis Matemático I. UTN FRLP

CAPÍTULO 3
Transformaciones en el plano

Marcelo F. Giulietti y Mariano M. Trifilio

Proporcionalidad

Situación problemática

En la calle 6 esq. 50 de la ciudad de La Plata está emplazado un obelisco cuya altura se requiere medir. Para ello se cuanta sólo con una cinta métrica de bolsillo de 2 metros de longitud. Aprovechando la ubicación en las cercanías de un poste de parada de transporte público y utilizando la propiedad de los cuerpos de producir (a la misma hora) sombras proporcionales a su altura se mide:

	Altura	**Sombra**
Obelisco	h	8 m
Poste	3,5 m	1,4 m

En la situación problemática intervienen dos magnitudes: altura y la longitud de la sombra. Se establece una proporción:

$$\frac{h}{3{,}5m} = \frac{8m}{1{,}4m}$$

Cada uno de los miembros de la proporción recibe el nombre de razón, siendo de cada una de ellas, el numerador el antecedente y el denominador el consecuente.

Al despejar la incógnita:

$$h = \frac{8m}{1{,}4m}.3{,}5m \qquad h = 20m$$

La altura del obelisco es de 20 m.

Observación: Las sombras que proyectan los objetos, tienen longitudes **proporcionales** a la altura de cada uno de ellos.

Si dividimos el valor de la altura con el valor de la sombra obtenemos la constante de proporcionalidad (k)

$$\frac{20m}{8m} = 2{,}5 \qquad \frac{3{,}5m}{1{,}4m} = 2{,}5 \qquad \frac{altura}{sombra} = 2{,}5$$

A partir de esta información se podría analizar cuál es la altura de un edificio que situado en la misma esquina arroja una sombra de 22 metros.

	Altura	Sombra
Obelisco	20 m	8 m
Poste	3,5 m	1,4 m
Edificio	?	22 m

Sabiendo que: $\frac{altura}{sombra} = k$

Al reemplazar los datos del problema: $\frac{altura}{22m} = 2{,}5$

Al resolver la ecuación: $altura = 2{,}5.22m$ $altura = 55m$

El edificio mide 55 metros.

Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al aumentar una de ellas, la otra también lo hace en la misma proporción.

Vale decir que si una de las magnitudes se multiplica o divide por una constante, la otra magnitud también debe ser multiplicada o dividida por la misma constante.

Ejemplo:

$$\frac{5}{3} = \frac{30}{18} = \frac{15}{9}$$

Son ejemplos de magnitudes directamente proporcionales:

- La altura y la sombra.
- El tiempo y el trabajo realizado.
- La cantidad y el precio.

- El tiempo y la distancia recorrida.
- El peso y el precio.

Magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al aumentar una de ellas, la otra disminuye en la misma proporción.

Vale decir que si una de las magnitudes se multiplica por una constante, la otra magnitud debe dividirse por la misma constante o viceversa

Son ejemplos de magnitudes inversamente proporcionales

- El número de obreros y el tiempo en realizar la obra.
- La velocidad y el tiempo.
- Las horas de trabajo y los días trabajados.

Por ejemplo, cuatro obreros tardan 12 días en construir una pared medianera ¿Cuánto tardarán ocho obreros en hacer el mismo trabajo?

Obreros	**Tiempo**
4	12 días
8	x

Al analizar la situación problemática podemos establecer que estamos trabajando con magnitudes inversamente proporcionales, es decir, al incrementarse una de ellas, la otra se decrementa en la misma proporción.

La constante de proporcionalidad la obtendremos confeccionando el producto entre las dos magnitudes. Es decir:

$$obreros \times tiempo = k$$

$$obreros \times tiempo = 48$$

Al reemplazar los datos del problema:

$$8 \times tiempo = 48$$

$$tiempo = \frac{48}{8}$$

$$tiempo = 6$$

Respuesta: 8 obreros tardarán 6 días en realizar el mismo trabajo.

Regla de tres simple

Se basa en los criterios de las magnitudes proporcionales.

1- **Regla de tres simple directa** (Utiliza magnitudes directamente proporcionales)

2- **Regla de tres simple inversa** (Utiliza magnitudes inversamente proporcionales)

Ejemplos:

1) Un ciclista que circula a velocidad constante recorre 20 km. en 5 horas. Si se sabe que ha empleado 6 horas en llegar de la ciudad A a la ciudad B ¿Qué distancia separa las ciudades?

Para poder dar respuesta a la pregunta, debemos analizar el tipo de magnitudes con las cuales vamos a trabajar. En este caso podemos interpretar que a mayor tiempo empleado, mayor será la distancia recorrida. Por lo tanto estamos en presencia de magnitudes directamente proporcionales.

tiempo	*distancia*
5h	20 km
6h	x km

$$\frac{5}{6} = \frac{20}{x}$$

$$5.x = 6.20$$

$$x = \frac{6.20}{5}$$

$$\mathbf{x = 24}$$

Respuesta: La distancia que separa las ciudades es 24 km

2) Un coche que circula a 40Km/h tarda 9 horas en recorrer la distancia que separa dos ciudades. Si vuelve a realizar el mismo viaje y emplea 10 horas. ¿A qué velocidad circuló en el segundo viaje?

Debemos analizar el tipo de magnitudes con las cuales vamos a trabajar. En este caso, podemos interpretar que a mayor tiempo empleado, menor será la velocidad. Por lo tanto estamos en presencia de magnitudes inversamente proporcionales.

tiempo	*velocidad*
9 h	40 km/h
10 h	x km/h

$$9.40 = 10.x$$

$$\frac{9.40}{10} = x$$

$$\mathbf{36 = x}$$

En el segundo viaje circuló a 36 km/h.

Actividad

1. Si 8 cajas de tizas cuestan $\$960$. ¿Cuánto se debe pagar por 13 cajas?
2. Para embotellar el contenido de un barril se necesitan 300 botellas de $\frac{3}{4}$ lts. ¿Cuántas botellas de ½ litro son necesarias para embotellar el contenido del barril?

3. Si un ciclista viaja a $20\ \frac{km}{h}$ durante $24\ hs$. ¿Cuánto tardará en recorrer el mismo camino a $25\ \frac{km}{h}$?

4. Completar el siguiente cuadro sabiendo que x e y son directamente proporcionales.

X	2	3		1	12		10
Y	4		8			25	

5. Completar el siguiente cuadro sabiendo que x e y son inversamente proporcionales.

X	12	3		1	2		10
Y	4		8			25	

6. Un ferretero envasa tornillos en bolsas de 50 unidades. Necesita 72 bolsas para envasar la totalidad. Si ahora debe colocarlos en bolsas de 150 unidades. ¿Cuántas bolsas tendrá que utilizar?

Porcentaje

Existen expresiones que involucran %:

- El precio del pan se incrementó un 5%.
- La matrícula universitaria disminuyó un 2%.
- El interés que otorga el plazo fijo es de 22% anual.
- Por pago en efectivo, 15% de descuento en indumentaria deportiva.

El “x % de un valor Q” lo podemos escribir simbólicamente como:

$$\frac{x}{100}.Q$$

La idea de todas estas expresiones es que hubo un cambio y su magnitud se expresa como porcentaje.

Ejemplos

1. El 20% de 270, lo podemos escribir simbólicamente como:

$$\frac{20}{100}.270 = 54$$

El 20% de 270 es 54.

2. De 500 mujeres encuestadas, 370 afirman que les gusta ver series. Expresar dicho número como un porcentaje.

$$.\frac{x}{100}.500 = 370$$

$$x = \frac{370.100}{500}$$

$$x = 74$$

Al 74% de las mujeres les gusta ver series.

3. Se decide comprar un TV de una promoción que otorga el 15% de descuento por pago en efectivo y se paga $10625. ¿Cuál sería el precio del producto sin el descuento de la promoción?

$$\frac{85}{100}.Q = 10625$$

$$Q = \frac{10625.100}{85}$$

$$Q = 12500$$

El precio del TV sin el descuento es de $12500.

4. ¿Qué porcentaje representa 135 de 900?

$$\frac{x}{100}.900 = 135$$

$$x = \frac{135.100}{900}$$

$$x = 15$$

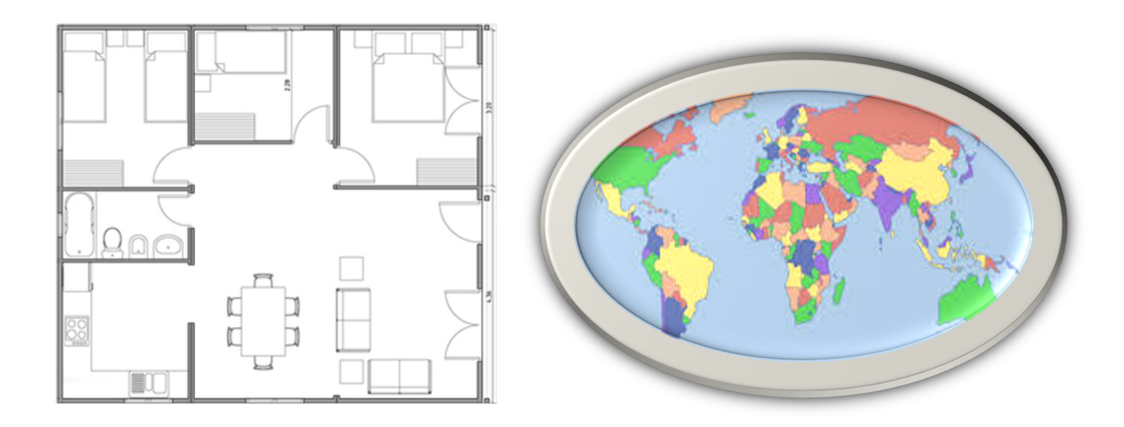
135 representa el 15% de 900.

Actividad

1. Hallar el 22% de 4800.
2. Si el 6% de un número es 12. ¿Cuál es el número?
3. ¿Qué porcentaje de 400 es 60?
4. Con un descuento del 20% el precio de un aire acondicionado es de $ 8900. ¿Cuál es el precio original del producto?
5. Hallar el 50% de 70 y el 70% de 50. Comparar los resultados.
6. Un artículo cuyo precio de lista es $1480 tiene un descuento de 10% por pago con tarjeta de crédito. Si la tarjeta es del Banco Nación se efectúa un 5% de descuento extra sobre el descuento anterior. ¿Cuánto se pagará aprovechando los dos descuentos?
7. Si por un proyecto de Arquitectura de una Obra valuada en $ 4000000 se cobró un honorario de $ 320000. ¿Qué porcentaje le correspondió al proyectista?

Semejanza. Escalas

Una idea intuitiva de la semejanza entre figuras y cuerpos hace referencia a los juegos que utilizan los niños que son modelos a escala casi perfectos de la realidad. Otros ejemplos son el planisferio y el plano de una casa. Una foto de las que se utilizan para el Documento de Identidad es asimismo una representación de un rostro en una cierta escala; el globo terráqueo, el mapamundi, los mapas, los planos de terrenos y edificios son asimismo representaciones realizadas mediante figuras semejantes mucho más pequeñas que las reales.



Puede establecerse una relación entre el dibujo y el objeto real que se denomina razón de semejanza o simplemente escala.

Decir que un plano está en escala 1:100 implica que 1 cm del dibujo representa 100 cm de la realidad

En general, la construcción de figuras en forma gráfica exige como operación previa el establecimiento de una escala, que en cada caso particular debe ser compatible con el problema que se aborde.

Para cada problema particular resulta imprescindible determinar mediante comparación entre el máximo tamaño del dibujo y la dimensión máxima de la figura a graficar, la escala en la que deberá realizarse la representación.

Por ejemplo, se desea graficar en una hoja oficio (22 cm x 35 cm) la planta de una vivienda ubicada en un terreno de 9 m x 20 m.

Colocando en forma vertical la longitud máxima y dejando un margen de 5 cm, la longitud vertical útil será de 25 cm.

La escala deberá ser:

$$\frac{25\ cm}{20\ m} = \frac{25\ cm}{2000\ cm} = \frac{1}{80}$$

25 cm

Actividad

1. En un plano se utiliza una escala 1:100.

1.1 ¿Qué longitud tiene en el plano un segmento que en la realidad mide 4,20 m?

1.2 ¿Qué longitud tiene en la realidad un segmento que en el plano mide 0,8 cm?

2. En un papel de 40 cm x 60 cm, se desea representar un plano de la planta de un edificio de 20 m x 50 m. Hallar la escala en que debe dibujarse si el margen mínimo debe ser de 5 cm.
3. Un triángulo tiene lados de longitud 5 cm; 8 cm; 7 cm, y otro semejante con él tiene perímetro 0,50m. Hallar sus lados y la razón de semejanza.

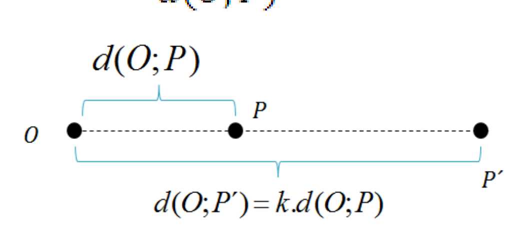
Transformaciones en el plano

Existen distintos tipos de transformaciones, cuya naturaleza depende de la ley que las rige, las que conservan la forma, llamadas HOMOTECIAS y las que conservan las distancias llamadas ISOMETRÍAS.

Homotecias

Una HOMOTECIA de centro O y razón k es una transformación plana en la que cada punto P tiene por imagen a P' obtenida por la relación $d(O;P') = k.d(O;P)$. Es decir que

$$\frac{d(O;P')}{d(O;P)} = k$$



Si $k > 0$ se llama homotecia directa y si $k < 0$ se llama homotecia inversa

Las características de las homotecias son:

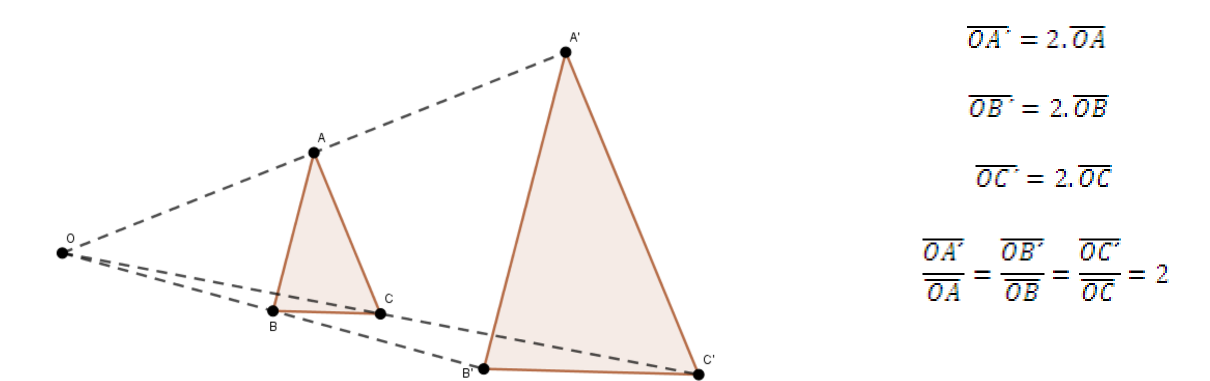
1.- Medidas proporcionales.

2.-Figuras semejantes.

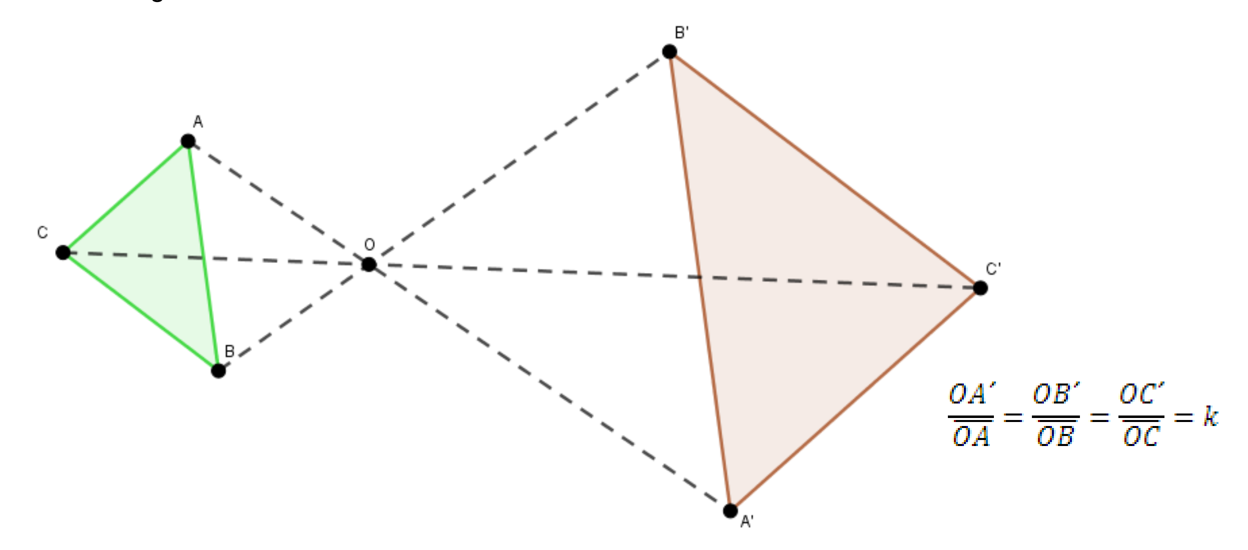
3.-Ángulos congruentes.

HOMOTECIA DIRECTA: Es aquella en la cual el centro de homotecia se encuentra fuera de las figuras.

Por ejemplo, al hallar la homotecia de centro O y razón 2 del triángulo ABC.



HOMOTECIA INVERSA: Es aquella en la cual el centro de homotecia se encuentra entre las figuras.

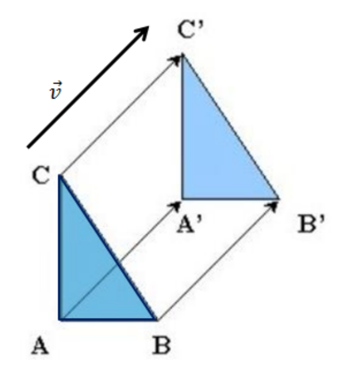


Para pensar:

a) La homotecia de razón 1 ¿qué transformaciones produce?
b) ¿Y la razón 0?. ¿Y la razón -1?

Isometrías

Traslaciones: Son transformaciones en el plano que se obtienen por aplicación de un vector a cada punto de una figura.



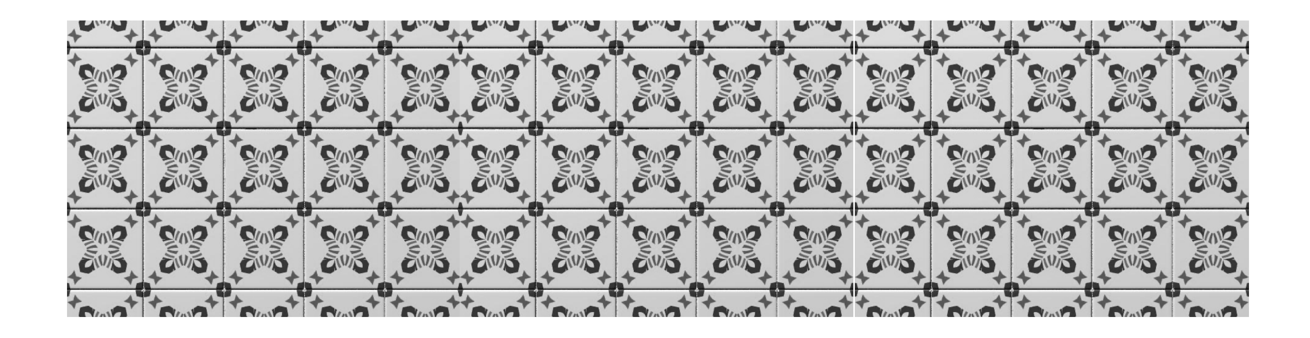
Dado el vector $\vec{v}$, de C se obtiene C´ por la aplicación a C de un vector equipolente al dado $\vec{v}$.

Se conservan todas sus medidas y forma. Muchas veces se usan traslaciones para diseñar plantas de edificios, por ejemplo, repitiendo un módulo constructivo tantas veces como sea necesario.

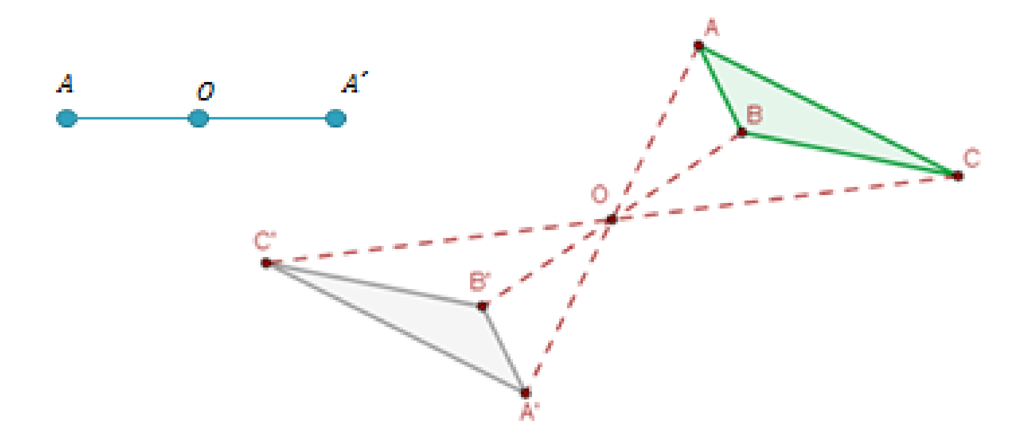
Módulos repetidos

O motivos de azulejos o cerámicos

Simetría central

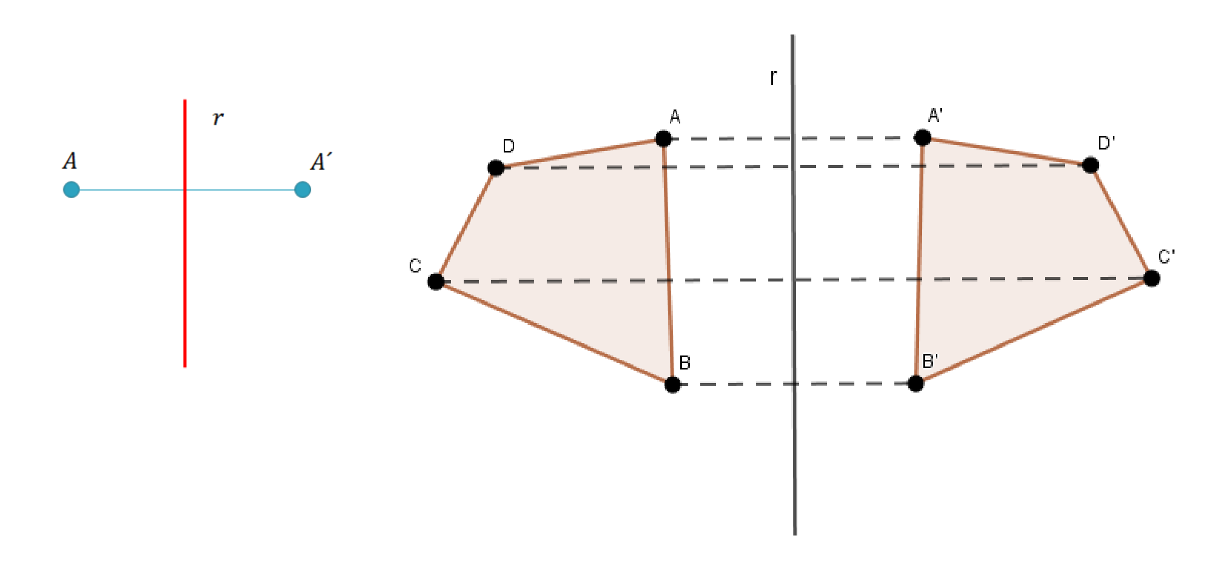


Se denomina simetría central de centro O a la transformación que le hace corresponder a un punto A otro A' de tal manera que O sea el centro del segmento $\overline{AA'}$.



Simetría Axial

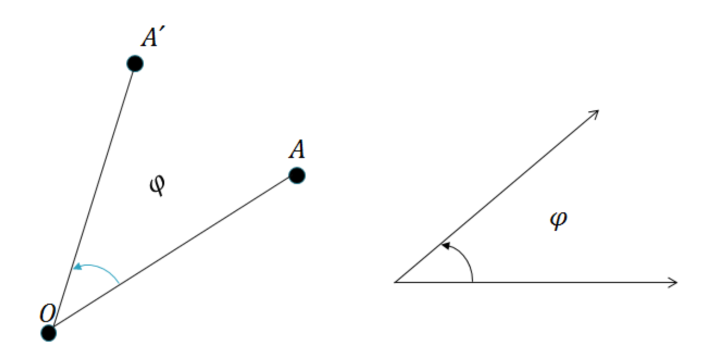
Se denomina simetría axial de eje r a la transformación que le hace corresponder a un punto A otro A' de tal manera que r sea mediatriz segmento $\overline{AA'}$.



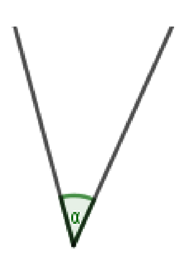
Las medidas no se alteran pero las figuras no son superponibles en el plano.

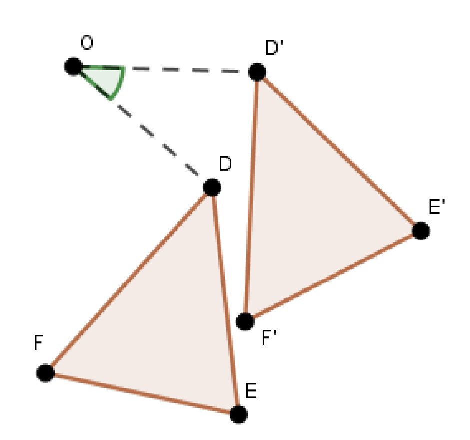
Rotación

Se denomina rotación de centro O y ángulo φ, al movimiento que transforma a un punto A en A' tal que $OA = OA'$ y $A\hat{O}A'$ tiene la amplitud y sentido de φ



Ejemplo:

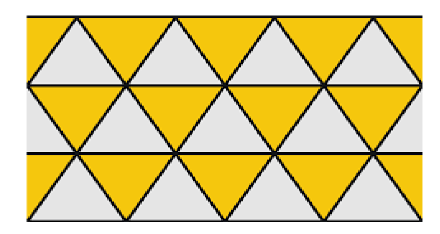


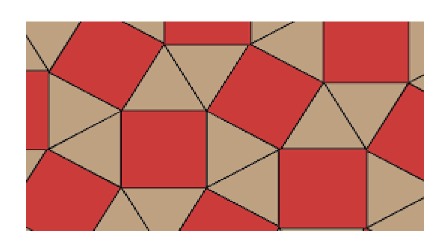


Teselaciones

El teselado hace referencia a una regularidad o patrón de figuras que recubren o pavimentan completamente una superficie plana de manera que no se superponen ni haya huecos. Se utilizan piezas regulares o irregulares. Son posibles tres teselaciones con polígonos regulares: con triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos. También se usan combinaciones de polígonos regulares.

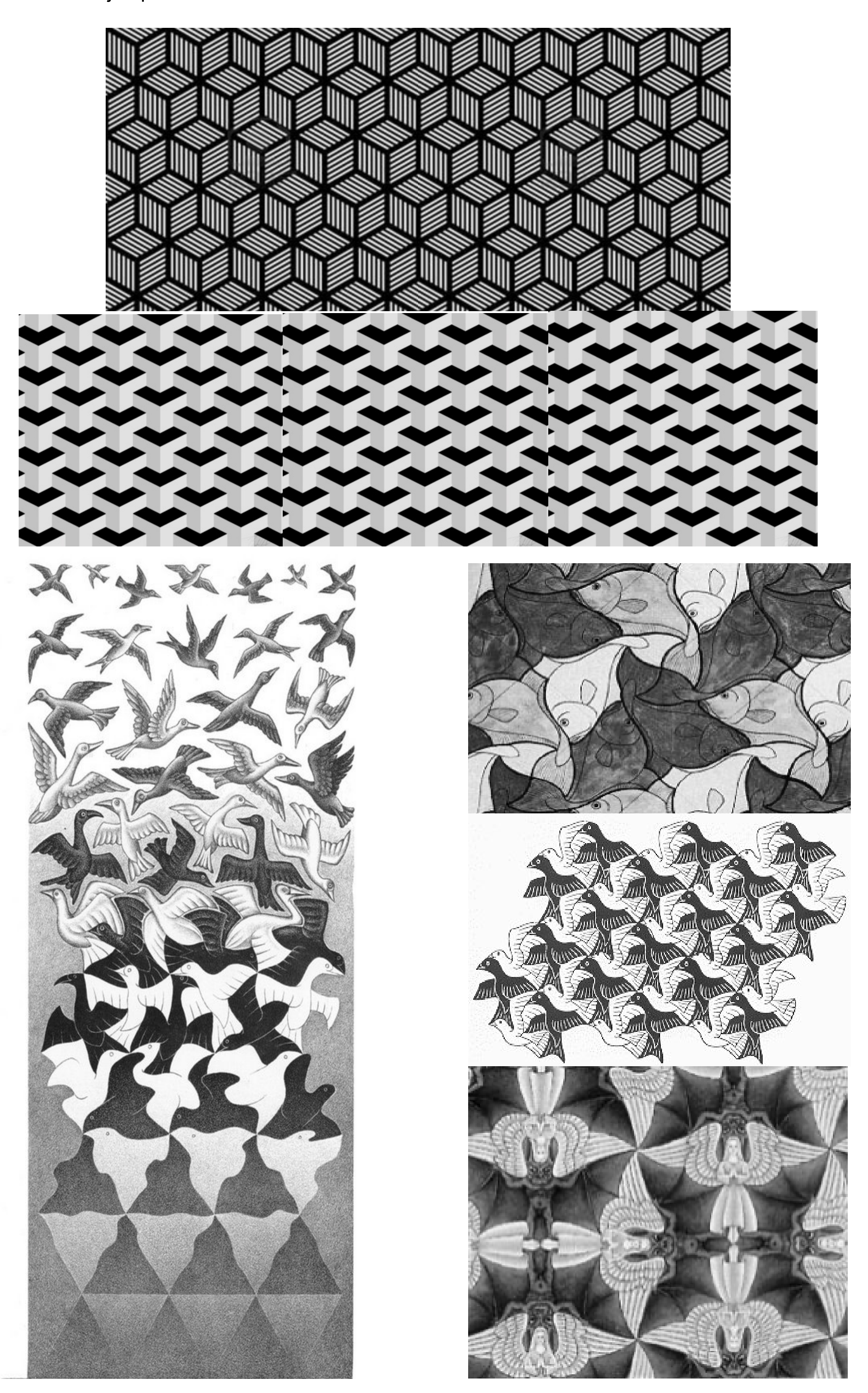
Ejemplos:





Analizar las siguientes teselaciones y señalar los movimientos planos necesarios para obtenerlas a partir de su motivo básico y su plantilla.

Otros ejemplos de teselaciones:



Proporcionalidad Aurea

El concepto de homotecia está ligado al de proporción y éste al de ESCALA.

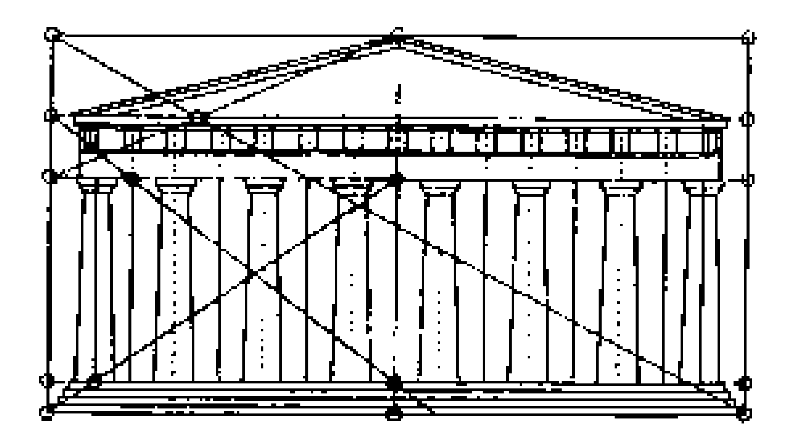
Cuando se dibuja un plano se conserva una relación métrica entre el dibujo y la realidad que se representa, llamada escala. Así un plano en escala 1:25 significa que en él por cada unidad de medida del dibujo se representan 25 de esas unidades en la realidad.

Existen distintos tipos de proporción aplicables a la Arquitectura, siendo la más famosa la proporción áurea. [φ= 1,618…]

La proporción áurea o Divina Proporción se conoce desde la antigüedad. En Egipto, Grecia, Roma, las más bellas esculturas y construcciones arquitectónicas están basadas en ese canon.

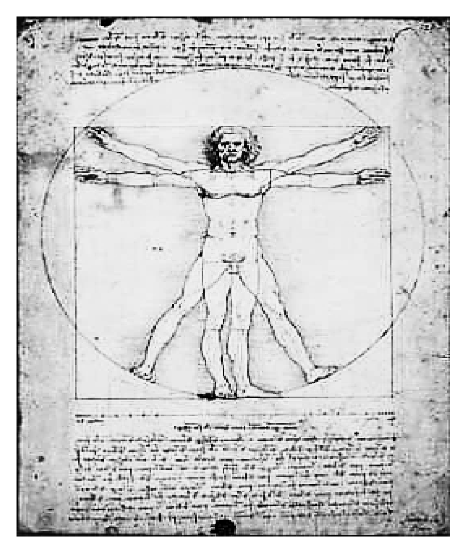
Según Platón, “No hay manera de combinar dos cosas sin una tercera. Debe haber una relación entre ellas que las ensamble. La mejor ligazón es el todo”.

El Partenón es un ejemplo notable de su uso.



También Leonardo da Vinci fue seducido por esa peculiar medida, tratando de vincular la arquitectura y el cuerpo humano.

El Vitrubio representa las proporciones que podían establecerse en el cuerpo humano.



Con este dibujo **Leonardo da Vinci** ilustró el libro La Divina Proporción de **Luca Pacioli** editado en 1509. En dicho libro se describen cuales han de ser las proporciones de las construcciones artísticas. En particular, **Pacioli** propone un hombre perfecto en el que las relaciones entre las distintas partes de su cuerpo sean proporciones áureas. Estirando pies y manos y haciendo centro en el ombligo se dibuja la circunferencia. El cuadrado tiene por lado la altura del cuerpo que coincide, en un cuerpo armonioso, con la longitud entre los extremos de los dedos de ambas manos cuando están extendidos y formando un ángulo de 90° con el tronco. Resulta que el cociente entre la altura del hombre (lado del cuadrado) y la distancia del ombligo a la punta de la mano (radio de la circunferencia) es el número áureo.

En otro orden de ideas Leonardo De Pisa (1179 – 1250) (Fibonacci) resuelve el famoso problema del nacimiento de los conejos:

Hallar el número de conejos que se reproducen a partir de una pareja de ellos que tiene una nueva pareja cada mes, siendo el tiempo de maduración para su aptitud reproductiva de 3 meses desde su nacimiento.

La solución al problema encontrada fue la sucesión de números.

1 2 3 5 8 13 21 24 55 89 144 233 610 987 1597 2584 4181 6765 10946 ...

Donde la ley de formación a partir de los dos primeros es que el siguiente es igual a la suma de los dos anteriores, siendo la sucesión de infinitos términos.

La proporción áurea está relacionada con la sucesión de Fibonacci

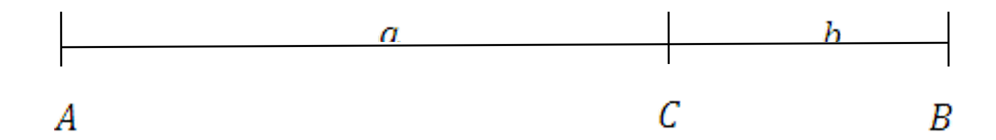
Si se divide cada número de la sucesión por el número anterior se encontrará que se acerca al número φ, es decir, dados números mayores de la sucesión la proporción se acercará al número φ. En síntesis el límite de la proporción se aproxima al número de oro. Esta es la propiedad más significativa de la sucesión, como se evidencia en el cuadro siguiente.

Nº	Nº anterior	División	Resultado
2	1	2/1	2
3	2	3/2	1,5
5	3	5/3	1,6666…
8	5	8/5	1,6
13	8	13/8	1,625
21	13	21/13	1,615384…
34	21	34/21	1,619047…
55	34	55/34	1,617647…
89	55	89/55	1,6181818…
144	89	144/89	1,66179775…
233	144	233/144	1,6180555…

¿Cómo se obtiene esa razón de proporcionalidad?

En el siguiente caso se trata de dividir un segmento en media y extrema razón. Geométrica y Algebraicamente es la partición asimétrica más lógica e importante a causa de sus propiedades matemáticas y estéticas.

Dado un segmento $\overline{AB}$ se lo divide en dos partes utilizando un punto C, de modo tal que el segmento MAYOR sea al MENOR, lo que el TODO sea al MAYOR.



Se dice que dos números positivos a y b están en razón áurea si y sólo si:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

Para obtener el valor de φ a partir de esta razón considera lo siguiente:

Que la longitud del segmento más corto b sea 1 y que la de a sea x. Para que estos segmentos cumplan con la razón áurea deben cumplir que:

$$\frac{1+x}{x} = \frac{x}{1}$$

Al multiplicar ambos miembros por x y reordenando:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Mediante la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado se obtiene que las dos soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}61803\ \ldots$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong -0{,}61803\ \ldots$$

x_2 no puede ser solución ya que la longitud de un segmento no puede ser negativo.

La solución positiva es el valor del número áureo (φ), y esto es una prueba formal de que el número áureo es irracional, ya que incluye la raíz de un número positivo.

Historia del número áureo

Existen numerosos textos que sugieren que el número áureo se encuentra como proporción en ciertas estelas Babilonias y Asirias de alrededor de 2000 a. C. Sin embargo no existe documentación histórica que indique que el número áureo fue usado conscientemente por los arquitectos o artistas en la construcción de las estelas. También es importante notar que cuando se mide una estructura complicada es fácil obtener resultados curiosos si se tienen muchas medidas disponibles. Además para que se pueda considerar que el número áureo está presente, las medidas deben tomarse desde puntos relativamente obvios del objeto y este no es el caso de los elaborados teoremas que defienden la presencia del número áureo. Por todas estas razones Mario Livio concluye que es muy improbable que los babilonios hayan descubierto el número áureo.

El primero en hacer un estudio formal sobre el número áureo fue Euclides (c. 300-265 a. C.), quién lo definió de la siguiente manera:

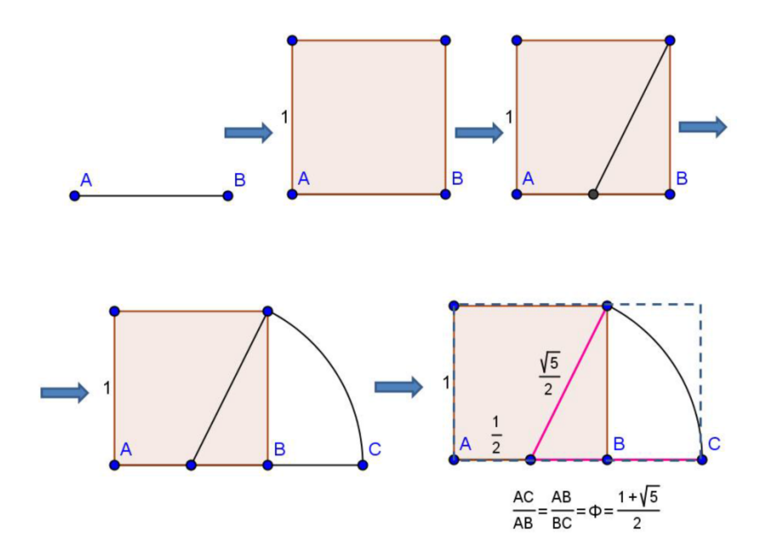
"Se dice que una línea recta está dividida en el extremo y su proporcional cuando la línea entera es al segmento mayor como el mayor es al menor."

Pero, ¿Cómo se hace para dividir geométricamente un segmento en esta proporción?

Construcción del Rectángulo Áureo conociendo su lado menor

Para la construcción de un rectángulo áureo,a partir de conocer su lado menor, en primer lugar formaremos un cuadrado de longitud igual al lado conocido.

Posteriormente se toma el punto medio de la base, se traza la distancia hasta uno de los vértices superiores y con un compás, se proyecta esa distancia hasta cortar la prolongación de la base, obteniendo el punto C

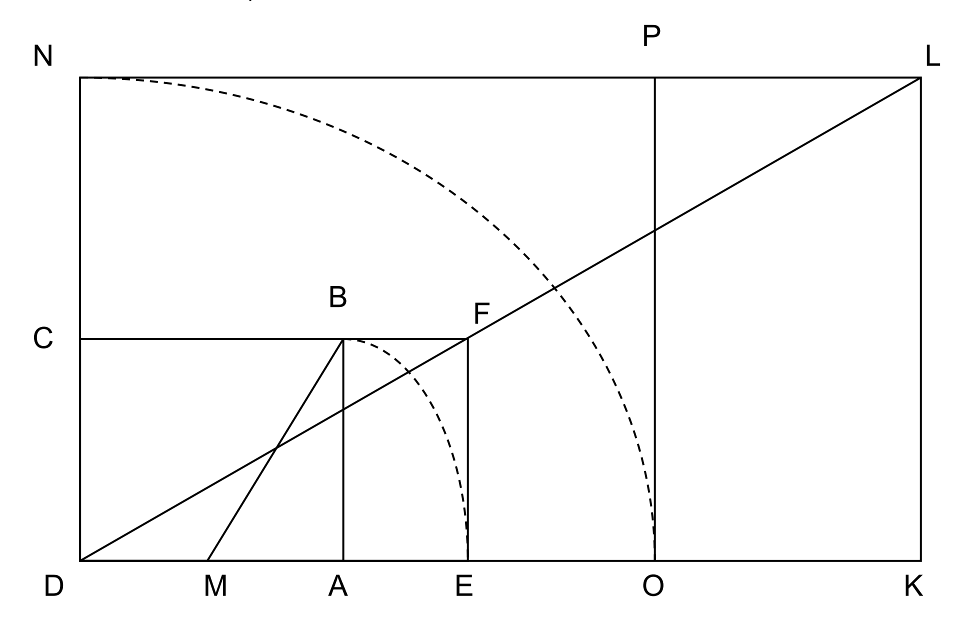


Siendo la distancia AC el lado mayor del rectángulo áureo.

Construcción del Rectángulo Áureo conociendo su lado mayor

Para dividir un segmento cualquiera como el $\overline{DK}$ se construye un rectángulo áureo con cualquier unidad a partir de D. Luego se traza la diagonal DF la que prolongada corta a la perpendicular por K en L, permitiendo construir el rectángulo DKLN. Con radio DN, se halla O y se construye el cuadrado DOPN.

Se observa que por ser semejantes los triángulos DFE y DLK se mantiene la proporción (por el Teorema de Thales).



$$\frac{DA}{AE} = \frac{DO}{OK} = \varphi$$

Actividad

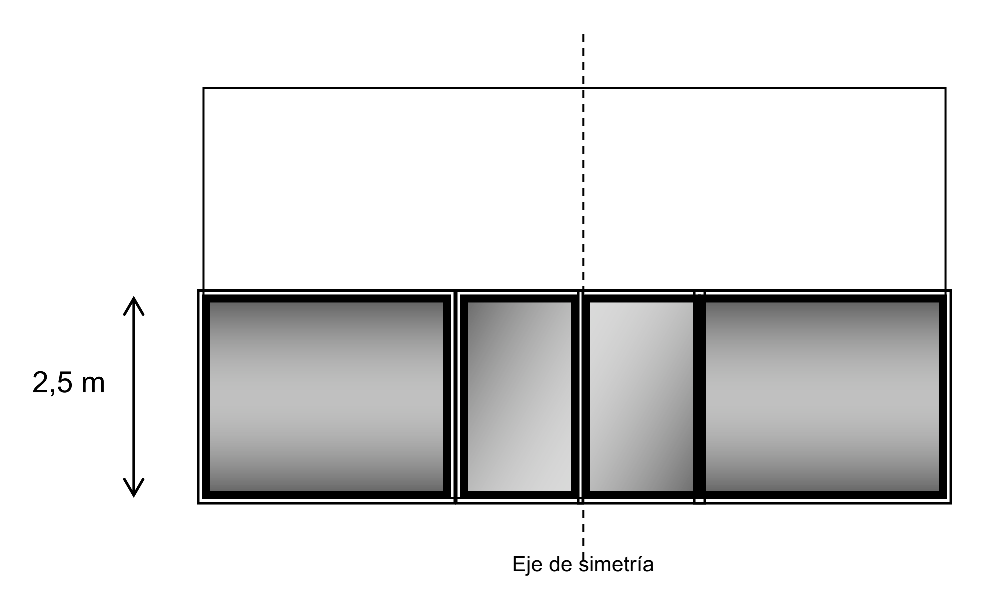
1. Calcular $\frac{1}{\varphi}$; φ^2 ; $\varphi^2 - \varphi$
2. Construir un rectángulo áureo tal que el MENOR de sus lados sea de 4 cm.
3. Ídem anterior tal que el MAYOR se sus lados sea 4 cm.
4. Si se toma el lado menor de un rectángulo áureo como unidad. ¿Qué superficie tiene el rectángulo en esas unidades?
5. Ídem anterior si la unidad es el lado mayor.

Ejercicios de aplicación a la arquitectura

1. Se quiere construir la fachada de un local comercial, de modo tal que contenga una puerta doble y dos divisiones adjuntas del mismo alto tal como muestra la figura.

1.1 Sabiendo que la altura de la puerta es de 2,5 m . Realizar la construcción gráfica de forma tal que cada vidriera y su puerta se encuentren en divina proporción.

1.2 Hallar gráficamente la altura de la fachada de modo tal que se forme la divina proporción a partir del ancho total de la fachada.



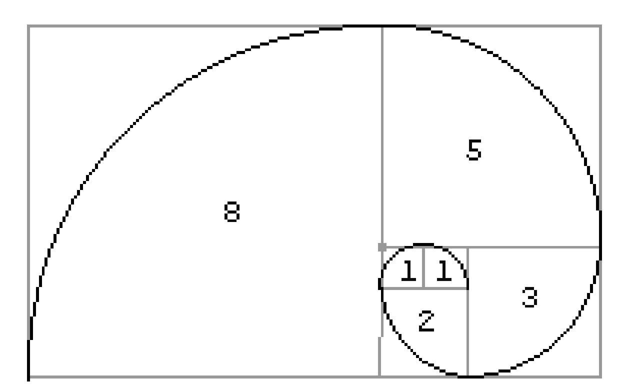
2. Consideremos un cantero cuadrado por cuya diagonal pasa un camino de 2,5 m de longitud. Suponiendo que queremos ampliar ese cantero llevándolo a la forma de rectángulo áureo. ¿Cuánto deberán medir sus lados?

3. Un arquitecto desea construir un jardín de invierno de forma rectangular, cuyas dimensiones guarden la relación áurea. Partiendo de que el ancho disponible para el recinto es de 2 m, se desea conocer el largo que tendrá dicho jardín.

4. El gobierno de la Provincia de Buenos Aires, está llevando a cabo la construcción de un complejo habitacional. El estudio de suelo arrojó como resultado que la altura máxima de cada uno de los edificios deberá ser de 10m. El gobierno pone como condición que los frentes de los edificios deberán ser armoniosos en sus dimensiones. ¿Cuánto deberá ser el ancho del edificio para que el mismo mantenga las proporciones del "número de oro"?

5. Una institución educativa propone conservar en su fachada exterior una proporción áurea. Sabiendo que el ancho del terreno es de 20 m y teniendo que contar con una puerta de acceso de 2 m de alto. ¿Cuál debería ser la altura de la fachada y el ancho de la puerta?

Muchos ornamentos arquitectónicos utilizan la espiral áurea, que se obtiene fácilmente a partir de un rectángulo áureo.



El logo del Museo de Ciencias Naturales de La Plata está compuesto de dos espirales una de ellas áurea y la otra logarítmica, representando la belleza y la armonía que hay en la naturaleza.



Modulor

El Arquitecto Le Corbusier, pretendió crear un sistema de medida independiente de los utilizados en el mundo el Pie – Pulgada y el metro decimal, con el propósito de ser utilizado en la industrialización, la prefabricación y la normalización, por ejemplo, lo que se construya en EE.UU, tendría que ser compatible con lo que se construya en Europa. Este nuevo sistema debería ser antropométrico, matemático y armónico y por lo tanto basado en la medida de un hombre de 1,83 metros de altura, que con el brazo en alto alcanzaría aproximadamente 2,26 metros

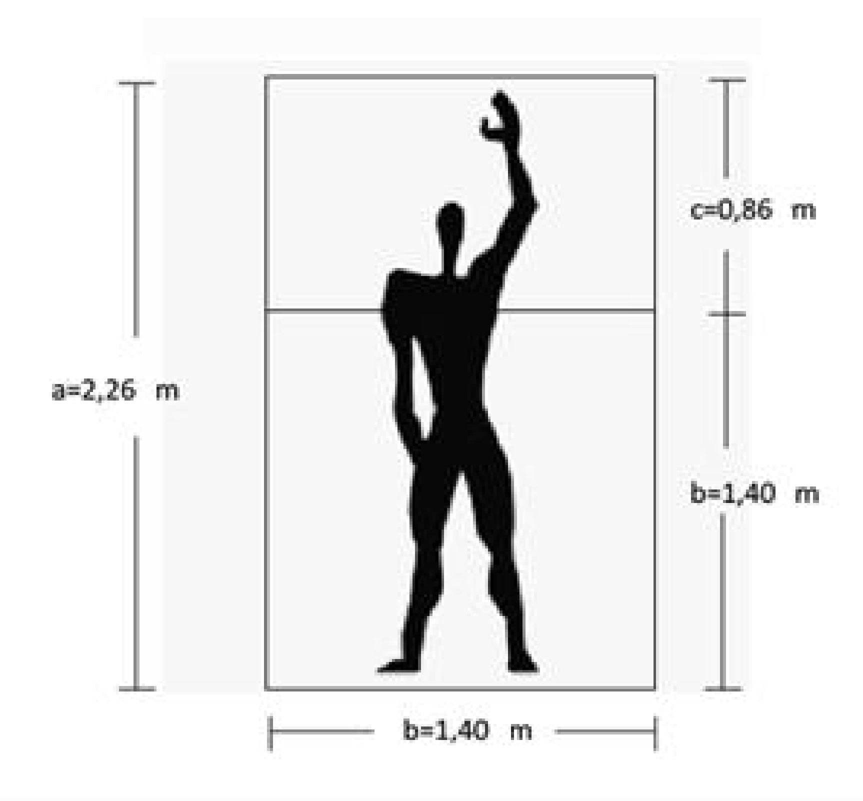
Le Corbusier se une a una larga tradición de arquitectos como Vitruvio, Da Vinci y León Battista Alberti que también presentaron estudios de una relación matemática entre las medidas del hombre y la arquitectura, buscando así un nuevo sistema de medidas, en que cada magnitud se relaciona con la anterior, con la finalidad de ser utilizada como medida base en todos y cada uno de los elementos de la obra arquitectónica

En el Modulor detallado por Le Corbusier parte desde la medida del hombre con la mano levantada (226 cm) y de su mitad, la altura del ombligo (113 cm). Desde esta primera dimensión y haciendo divisiones y multiplicaciones sucesivas por el número de oro φ, se obtiene la llamada serie azul, y de la segunda del mismo modo la serie roja. Siendo ambas sucesiones de Fibonacci y permitiendo miles de combinaciones armónicas. Pudiendo de ese modo ser utilizada en desarrollos pequeños como muebles o tan grandes como la planificación de una ciudad.

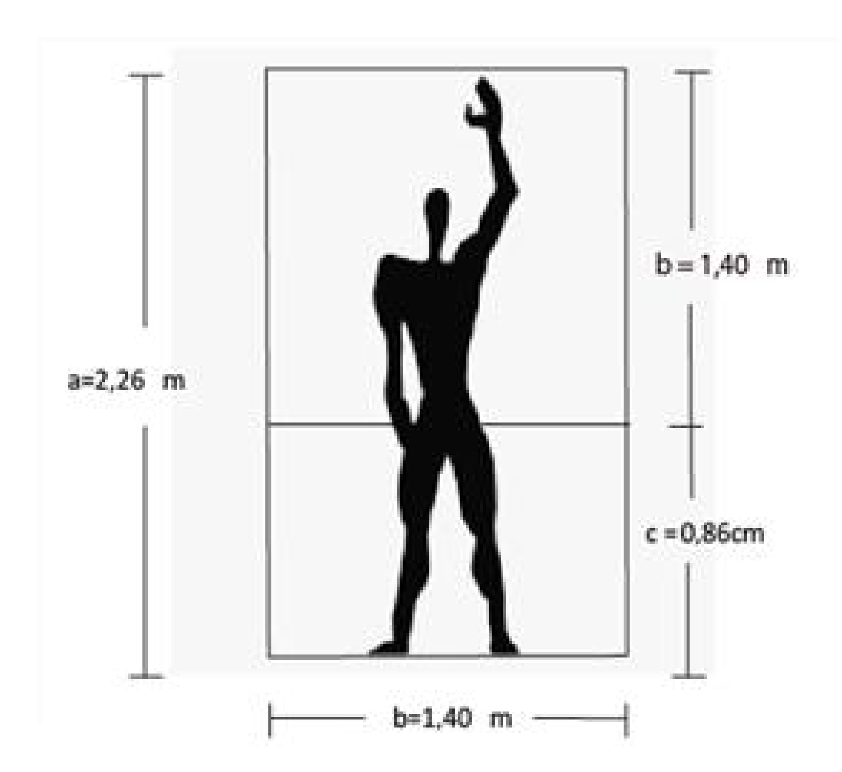
Por lo tanto el procedimiento utilizado para la construcción de la serie Azul será a partir de insertar al hombre con su brazo extendido 226 cm o su equivalente (2.26 m) en un rectángulo áureo, y utilizando el procedimiento de construcción a partir de conocer su lado mayor.

Sabiendo que $\frac{a}{b} = \varphi$ por lo tanto $\frac{a}{\varphi} = b$

Resulta entonces que $\frac{2,26}{1,618}$ =1,396 m de donde decimos que b = 1,40 m y por diferencia $c = 0,86\ m$

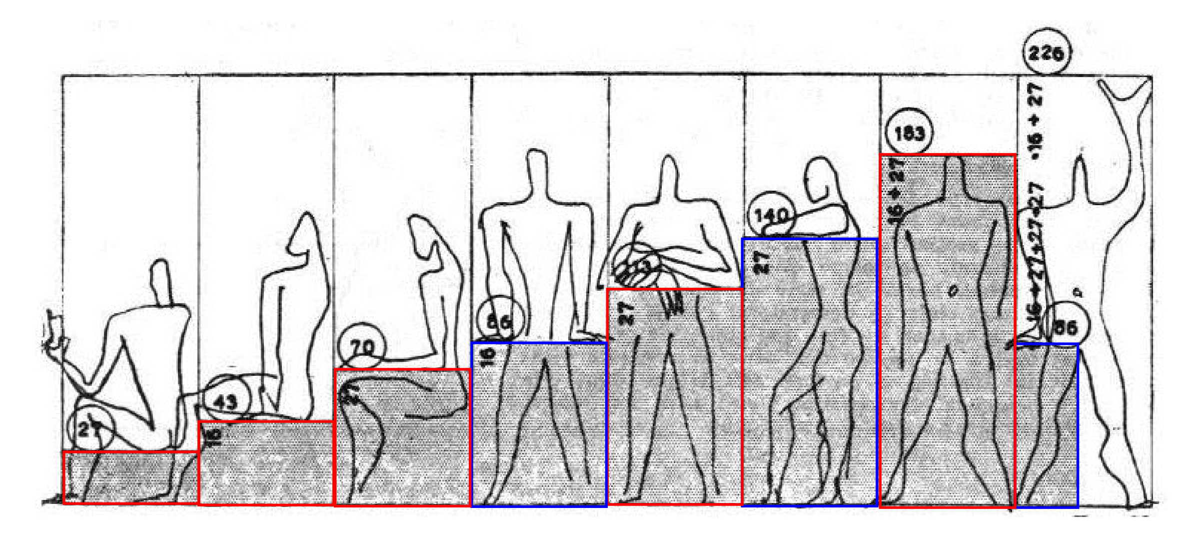


Le Corbusier observa un apoyo novedoso que fue llamado el hombre de pie que mira a lo lejos.



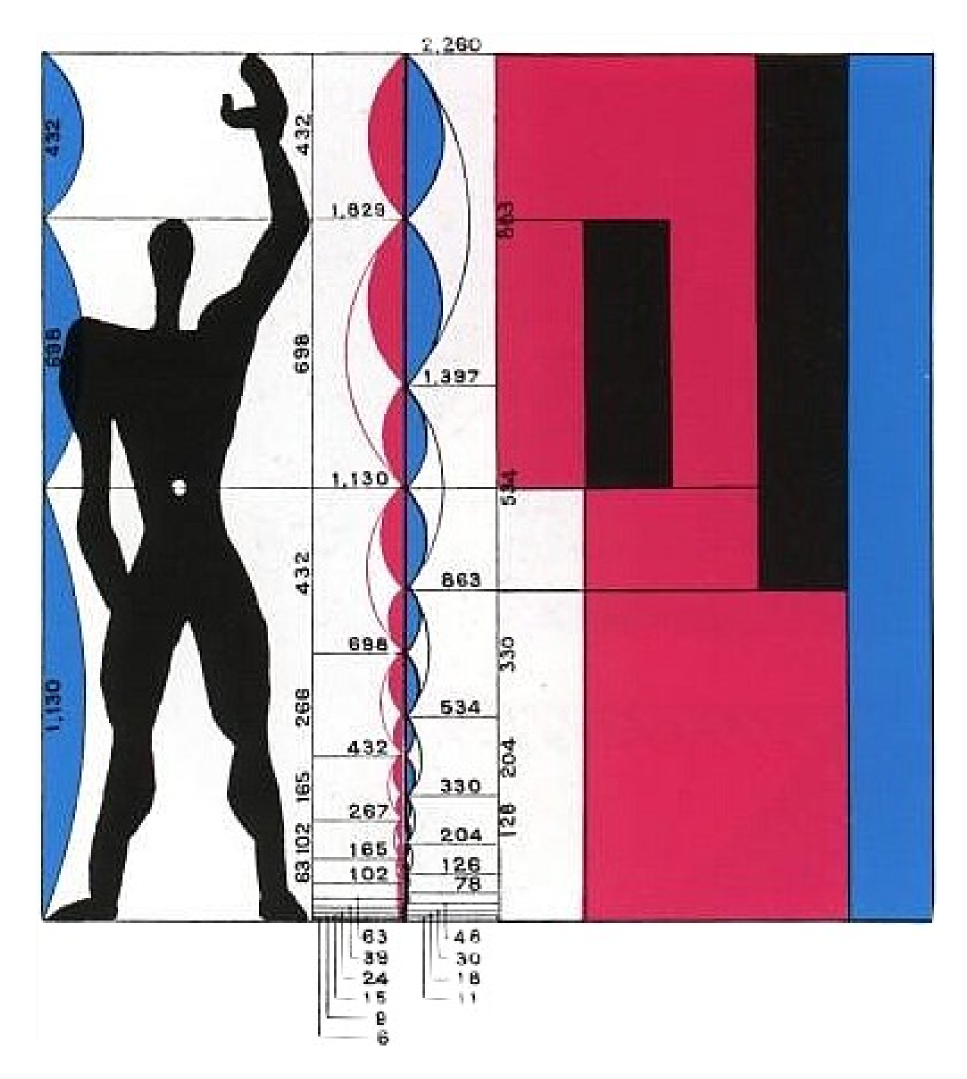
En esta segunda observación, Le Corbusier obtiene la medida del plano de trabajo.

De manera similar, pero utilizando la altura del hombre hasta su cabeza, 1,83 m se obtienen tres nuevas medidas, interesantes de la llamada serie Roja, 1,83 m (la altura del hombre), 1,13 m (la distancia del piso a su ombligo), y 0,70 m (un buen apoyo para el antebrazo del hombre sentado)



Serie azul, en metros, sería: ..., 9,57; 5,92; 3,66; **2,26**; 1,40; 0,86; 0,53; 0,33; 0,20;

Serie roja, en metros, sería: ..., 4,79; 2,96; 1,83; **1,13**; 0,70; 0,43; 0,26; 0,16; 0,10; ...



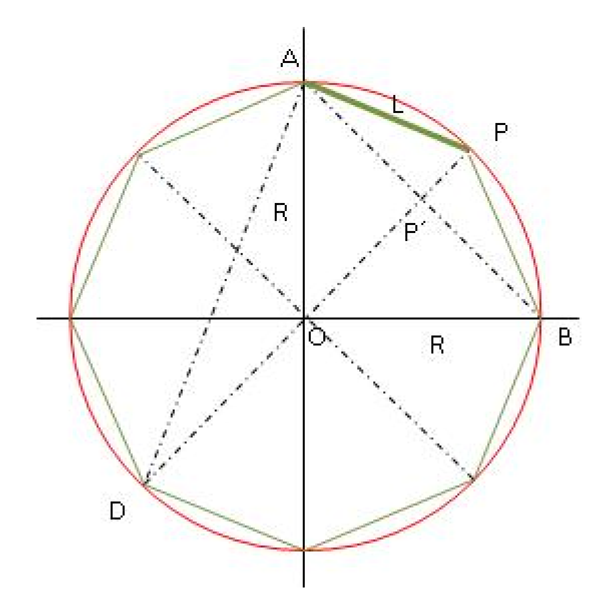
La inspiración de Le Corbusier nace fecundada por los tratados de la antigüedad, tanto arquitectónicos como matemáticos, que relacionaban las medidas de arquitectura con las medidas del cuerpo humano. Algunos autores han descrito estos estudios como un sistema de medidas que podía gobernar sobre las longitudes, las superficies y los volúmenes y mantener la escala humana en todas partes.

Proporción cordobesa

Euclides establece la proporción áurea o también conocida como la regla de oro, en el libro II de su tratado “Los Elementos de la Geometría”, durante la edad media, la ciudad española de Córdoba, fue quien atesoraría dicha obra, por consiguiente era razonable pensar que la arquitectura del lugar estaría sumamente comprometida con dicha idea, pero fue Rafael de la Hoz Arderius, quien realizó estudios antropométricos sobre las estructuras, mosaicos y esculturas que mostraron otros resultados. Se pudo corroborar que en dicha ciudad estaba presente una proporción distinta relacionada con la constante 1,3 conocida actualmente como la proporción cordobesa.

Esta proporción puede establecerse haciendo la relación entre el radio de una circunferencia circunscripta en un octógono regular y su lado, dicho cociente es $\frac{R}{L} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ dando como resultado la llamada proporción cordobesa siendo $\frac{R}{L} = 1{,}306562964$ ....

La fundamentación geométrica, consiste en construir una circunferencia de radio R, trazar su bisectriz entre el primer y tercer cuadrante



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo AOB obtendremos:

$(AB)^2 = R^2 + R^2$ de donde $AB = R\sqrt{2}$

Por simetría, $OP' = \frac{AB}{2}$ dado que $AP' = \frac{AB}{2}$ y por lo tanto $OP' = P'A$

Aplicando semejanzas entre los triángulos rectángulos DAP y AP´P resulta que

$\frac{L}{DP} = \frac{P'P}{L}$ de donde surge que $L^2 = DP * P'P$ dado que

DP = 2R y P´P= OP – OP´

Entonces, reemplazando queda:

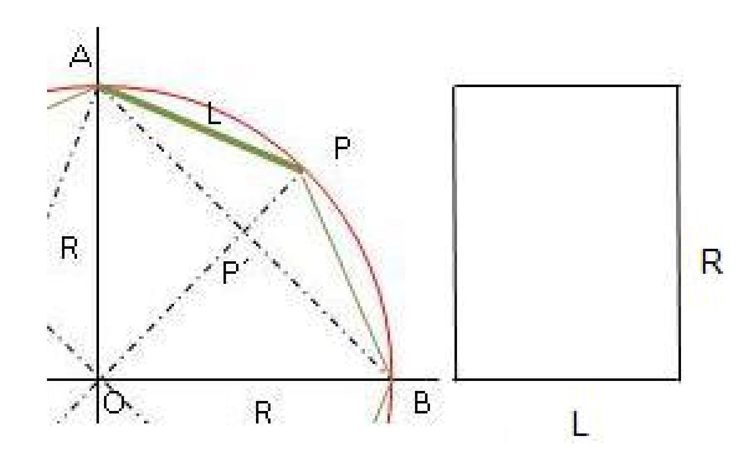
$L^2 = 2R.(OP - OP')$ Como $OP = R$ y $OP' = \frac{AB}{2}$ entonces $L^2 = 2R.(R - \frac{AB}{2})$ dado que $AB = R\sqrt{2}$ entonces, la expresión anterior queda $L^2 = 2R.(R - \frac{R\sqrt{2}}{2})$ operando queda que el lado del octógono $L = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ despejando resulta que

$$\frac{R}{L} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

Calculando se demuestra que la relación entre el radio R de la circunferencia y el lado L del octógono regular es $\frac{R}{L} = 1{,}306562964$ ...

A partir de lo dicho anteriormente, resulta sumamente sencilla la construcción de un rectángulo basado en dicha proporción, donde el lado mayor será el radio de la circunferencia y

el lado menor tendrá la medida del segmento AP (lado del octógono inscripto en ella) siendo el punto P la intersección de la circunferencia con la bisectriz del primer cuadrante.



Bibliografía

CARLOS SANCHEZ-MONTAÑA. (Lugo - 1959) http://www.arqweb.com/vitrum/autor.asp

DOBLADO GONZÁLEZ MARINA. Rafael de la Hoz Arderius y la Proporción Cordobesa.

LOPEZ CARLOS – GONZALVO CARLOS.(2008) APUNTE DE CÁTEDRA. TALLER VERTICAL II DE MATEMÁTICA.

CARLOS SANCHEZ-MONTAÑA. (LUGO - 1959). http://www.arqweb.com/vitrum/autor.asp MARINA DOBLADO GONZÁLEZ. Rafael de la hoz Arderius y la Proporción cordobesa.

Webgrafía

(accedido 20-10-2018)

http://matematica.laguia2000.com/general

www.ite.educacion.es

www.geogebra.es/cvg/banco/img/teselados

www.pinterest.es

http://goo.gl/imagenes/wYbeAe

http://goo.gl/imagenes/HzkK8M

https://goo.gl/imagenes/BBN8kz

www.wicked-halo.com

www.dartmounth.edu

www.museumwholesale.com

https://docplayer.es

https://goo.gl/imagenes/bVcyTo
https://goo.gl/imagenes/WrxVCP
https://goo.gl/imagenes/rG2pWB
https://goo.gl/imagenes/zfBskS
https://goo.gl/imagenes/ttK1tH
https://goo.gl/imagenes/jW7628

CAPÍTULO 4
Conceptos de Física Parte I

Julio Marañón Di Leo

Introducción

Física es un término que proviene del griego *phisis* y que significa “realidad” o “naturaleza”. Se trata de la ciencia que estudia las propiedades de la naturaleza con la asistencia del lenguaje matemático. La física se encarga de las propiedades de la materia, la energía, el tiempo y sus interacciones.

Esta ciencia no es sólo teórica, también es una ciencia experimental. Sus conclusiones pueden ser verificadas mediante experimentos. Además, sus teorías permiten realizar predicciones acerca de los experimentos futuros.

Ante el amplio campo de estudio y su extenso desarrollo histórico, la física es considerada como una ciencia fundamental o central. Esta ciencia se encarga desde la descripción de partículas microscópicas hasta del nacimiento de las estrellas en el universo, por ejemplo, Galileo Galilei, Isaac Newton y Albert Einstein han sido algunos de los físicos más reconocidos de la historia. De todas formas, filósofos como Aristóteles, Tales de Mileto y Demócrito se encargaron del desarrollo embrionario de la física.

Entre las principales teorías de la física, puede mencionarse a la mecánica clásica (que describe el movimiento macroscópico), el electromagnetismo (se encarga de los fenómenos electromagnéticos como la luz), la relatividad (analiza el espacio-tiempo y la interacción gravitatoria), la termodinámica (sobre los fenómenos moleculares y de intercambio de calor) y la mecánica cuántica (que estudia el comportamiento del mundo atómico).

Conceptos iniciales

La mecánica es la parte de la física que estudia las condiciones de reposo o movimiento de los cuerpos bajo la acción de las fuerzas. La mecánica clásica describe el comportamiento de los cuerpos a nivel macroscópico, clasificándolos al efecto en rígidos, deformables y fluidos.

Nos vamos a ocupar de los primeros, es decir de **cuerpos ideales**, indeformables, caracterizados por la invariabilidad de la distancia entre dos cualesquiera de sus puntos. Esta hipótesis, no se cumple en realidad, pero resulta útil dado que en muchas aplicaciones de la

Arquitectura e Ingeniería se utilizan. Las deformaciones que sufren los cuerpos utilizados son muy pequeñas frente a sus dimensiones de forma tal que no alteran su estabilidad, es decir su posición de equilibrio cuando está en reposo, o las características del movimiento cuando se encuentra en este estado.

Mecánica

- Estática: estudia las condiciones que deben satisfacer las fuerzas que actúan sobre un cuerpo o sistema material para mantenerlo en estado de reposo o equilibrio.
- Cinemática: estudia el movimiento de los cuerpos no interesando quien lo origina, se analiza desde un punto de vista geométrico.

Los cuatros conceptos básicos que trabaja la mecánica son: *espacio, tiempo, fuerza* y *masa*. Vamos a estudiar solamente los dos que utiliza la estática:

- ✓ *Espacio*: lo concebimos como el medio universal en el cual se localiza o puede localizarse, la materia. Lo percibimos a través de nuestros sentidos y desde el punto de vista del estudio de la Mecánica lo asociamos a la posición que en él ocupa un cierto punto P, que queda determinado por las distancias a tres planos ortogonales entre si, llamadas coordenadas del punto P
- ✓ *Fuerza*: este concepto expresa la capacidad de un cuerpo para producir un efecto o acción física sobre otro cuerpo. Puede ser transmitida por: **contacto directo** (empuje del agua o de la tierra, la presión del viento, el roce), ó **ejercida a distancia** (fuerzas gravitacionales o magnéticas).

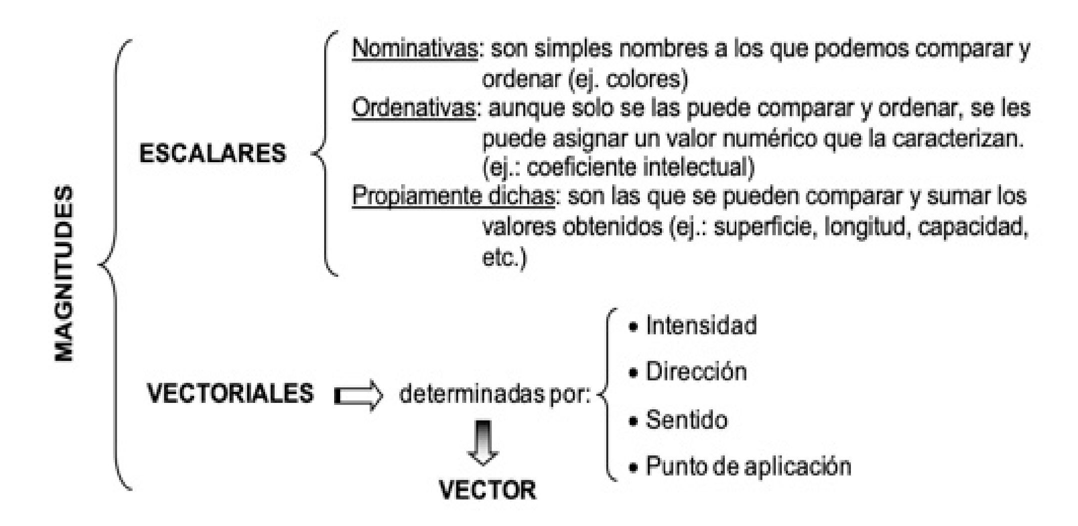
Otra manera de clasificar a las fuerzas es en:

- ✓ *Fuerzas conservativas:* (gravitatorias, elásticas y eléctricas): son fuerzas para las cuales el trabajo es recuperable. En un sistema formado sólo por estas fuerzas, la energía mecánica se conserva.

- ✓ *Fuerzas disipativas: (rozamiento)* cuando la energía mecánica no se conserva, no se mantiene constante, esa variación de energía mecánica es numéricamente igual al trabajo realizado por la fuerza de roce.

Magnitudes físicas

Sabemos que la Matemática (una Ciencia Exacta) trabaja con números que son entidades ideales y, por lo tanto, exactas. Las Ciencias Naturales, entre ellas la Física, se manejan a través de datos resultantes de una interacción entre el observador y elementos del fenómeno observado. Estas interacciones, si están precisamente protocolizadas, definen un tipo de magnitud.



Sistemas de Unidades

Sistema Internacional de Unidades

El Sistema Internacional de Unidades (abreviado SI del francés: *Le Système International d'Unités*), también denominado Sistema Internacional de Medidas, es el nombre que recibe el sistema de unidades que se usa en todos los países y es la forma actual del sistema métrico decimal. El SI también es conocido como «sistema métrico», especialmente en las naciones en las que aún no se ha implantado para su uso cotidiano. Fue creado en 1960 por la Conferencia General de Pesos y Medidas, que inicialmente definió seis unidades físicas básicas. En 1971 se añadió la séptima unidad básica, el mol. Una de las principales características, que constituye la gran ventaja del Sistema Internacional, es que sus unidades están basadas en fenómenos físicos fundamentales. La única excepción es la unidad de la magnitud masa, el kilogramo, que está definida como «la masa del prototipo internacional del kilogramo», el cilindro de platino e iridio almacenado en una caja fuerte de la Oficina Internacional de Pesos y Medidas. Las unidades del SI son la referencia internacional de las indicaciones de los instrumentos de medida y a las que están referidas a través de una cadena ininterrumpida de calibraciones o comparaciones. Esto permite alcanzar la equivalencia de las medidas

realizadas por instrumentos similares, utilizados y calibrados en lugares apartados y por ende asegurar, sin la necesidad de ensayos y mediciones duplicadas, el cumplimiento de las características de los objetos que circulan en el comercio internacional y su intercambiabilidad. Entre el 2006 y el 2009 el SI se ha unificado con la norma ISO 31 para formar el Sistema Internacional de Magnitudes (ISO/IEC 80000, con la sigla ISQ).

Unidades básicas

En la siguiente tabla se expresan las unidades básicas que componen el sistema internacional.

Magnitud física básica	Símbolo dimensional	Unidad básica	Símbolo de la Unidad	Observaciones
Longitud	L	metro	m	Se define fijando el valor de la velocidad de la luz en el vacío.
Tiempo	T	segundo	s	Se define fijando el valor de la frecuencia de la transición hiperfina del átomo de cesio.
Masa	M	kilogramo	kg	Es la masa del «cilindro patrón» custodiado en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas, en Sèvres (Francia).
Intensidad de corriente eléctrica	I	amperio	A	Se define fijando el valor de constante magnética.
Temperatura	Θ	kelvin	K	Se define fijando el valor de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.
Cantidad de sustancia	N	mol	mol	Se define fijando el valor de la masa molar del átomo de carbono-12 a 12 gramos/mol. Véase también número de Avogadro
Intensidad luminosa	J	candela	cd	Véase también conceptos relacionados: lumen, lux e iluminación física

Equivalencias

Metro (m). Unidad de longitud.

Definición: un metro es la longitud de trayecto recorrido en el vacío por la luz durante un tiempo de 1/299 792 458 de segundo.

Kilogramo (kg). Unidad de masa.
Definición: un kilogramo es una masa igual a la de un cilindro de 39 milímetros de diámetro y de altura, que se encuentra en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas, en Sèvres; Francia.

Segundo (s). Unidad de tiempo.
Definición: el segundo es la duración de 9192631770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.

Amperio o ampere (A). Unidad de intensidad de corriente eléctrica.
Definición: un amperio es la intensidad de una corriente constante que, manteniéndose en dos conductores paralelos, rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y situados a una distancia de un metro uno de otro en el vacío, produciría una fuerza igual a $2 \cdot 10^{-7}$ newton por metro de longitud.

Kelvin (K). Unidad de temperatura termodinámica.
Definición: un kelvin es la temperatura termodinámica correspondiente a la fracción 1/273,15 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.

Mol (mol). Unidad de cantidad de sustancia.
Definición: un mol es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en 0,012 kilogramos de carbono 12. Cuando se emplea el mol, es necesario especificar las unidades elementales, que pueden ser átomos, moléculas, iones, electrones u otras partículas o grupos especificados de tales partículas.

Candela (cd). Unidad de intensidad luminosa.
Definición: una candela es la intensidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia $5{,}4 \cdot 10^{14}$ hercios y cuya intensidad energética en dicha dirección es 1/683 vatios por estereorradián.

Unidades derivadas

Con esta denominación se hace referencia a las unidades utilizadas para expresar magnitudes físicas que son resultado de combinar magnitudes físicas tomadas como básicas.

El concepto no debe confundirse con los múltiplos y submúltiplos, los que son utilizados tanto en las unidades básicas como en las unidades derivadas, sino que debe relacionarse siempre a las magnitudes que se expresan. Si estas son longitud, masa, tiempo, intensidad de corriente eléctrica, temperatura, cantidad de sustancia o intensidad luminosa, se trata de una magnitud básica, y todas las demás son derivadas.

Ejemplos de unidades derivadas

Unidad de volumen o metro cúbico, resultado de combinar tres veces la longitud, una de las magnitudes básicas.

Unidad de densidad o cantidad de masa por unidad de volumen, resultado de combinar la masa (magnitud básica) con el volumen (magnitud derivada). Se expresa en kilogramos por metro cúbico y no tiene nombre especial.

Unidad de fuerza, magnitud que se define a partir de la segunda ley de Newton (fuerza=masa × aceleración). La masa es una de las magnitudes básicas pero la aceleración es derivada. Por tanto, la unidad resultante (kg • m / s^2) es derivada. Esta unidad derivada tiene nombre especial, Newton.

Unidad de energía, que por definición es la energía necesaria para mover un objeto una distancia de un metro cuando se aplica una fuerza de 1 Newton, es decir fuerza por distancia. Su nombre es el Julio (unidad) (Joule en inglés) y su símbolo es J. Por tanto, J= N • m.
En cualquier caso, siempre es posible establecer una relación entre las unidades derivadas y las básicas mediante las correspondientes ecuaciones dimensionales.

Definiciones de las unidades derivadas

Unidades con nombre especial

- *Hertz o hercio (Hz).* Unidad de *frecuencia*. Definición: un hercio es un ciclo por cada segundo.

$$\mathrm{Hz} = \frac{1}{\mathrm{s}}$$

- *Newton (N)*. Unidad de *fuerza*. Definición: un Newton es la fuerza necesaria para proporcionar una aceleración de 1 m/s^2 a un objeto cuya masa es de 1 kg.

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{m} \cdot \mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$$

- *Pascal (Pa)*. Unidad de presión. Definición: un Pascal es la presión que ejerce una fuerza de 1 newton sobre una superficie de 1 metro cuadrado normal a la misma.

$$\mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{m}}$$

- *Watt o vatio (W)*. Unidad de potencia. Definición: un vatio es la potencia que da lugar a una producción de energía igual a 1 julio por segundo. En términos eléctricos, un vatio es la potencia producida por una diferencia de potencial de 1 voltio y una corriente eléctrica de 1 amperio.

$$W = \frac{J}{s} = V \cdot A = \frac{m^2 \cdot kg}{s^3}$$

- *Coulomb o culombio (C)*. Unidad de carga eléctrica. Definición: un culombio es la cantidad de electricidad transportada en un segundo por una corriente de un amperio de intensidad.

$$C = A \cdot s = F \cdot V$$

- *Volt o voltio (V)*. Unidad de potencial eléctrico y fuerza electromotriz. Definición: la diferencia de potencial a lo largo de un conductor cuando una corriente con una intensidad de un amperio utiliza un vatio de potencia.

$$V = \frac{J}{C} = \frac{m^2 \cdot kg}{s^3 \cdot A}$$

- *Ohm u ohmio (Ω)*. Unidad de resistencia eléctrica. Definición: un ohmio es la resistencia eléctrica que existe entre dos puntos de un conductor cuando una diferencia de potencial constante de 1 voltio aplicada entre estos dos puntos produce, en dicho conductor, una corriente de intensidad 1 amperio, cuando no haya fuerza electromotriz en el conductor.

$$\Omega = \frac{V}{A} = \frac{m^2 \cdot kg}{s^3 \cdot A^2}$$

- *Siemens (S).* Unidad de conductancia eléctrica. Definición: un siemens es la conductancia eléctrica que existe entre dos puntos de un conductor que tiene un ohmio de resistencia.

$$S = \frac{1}{\Omega}$$

- *Farad o faradio (F).* Unidad de capacidad eléctrica. Definición: un faradio es la capacidad de un conductor con una diferencia de potencial de un voltio y tiene como resultado una carga estática de un culombio.

$$F = \frac{A \cdot s}{V} = \frac{C}{V} = \frac{C^2}{J} = \frac{C^2}{N \cdot m} = \frac{s^2 \cdot C^2}{m^2 \cdot kg} = \frac{s^4 \cdot A^2}{m^2 \cdot kg}$$

- *Tesla (T).* Unidad de densidad de flujo magnético e intensidad de campo magnético. Definición: un tesla es una inducción magnética uniforme que, repartida normalmente sobre una superficie de un metro cuadrado, produce a través de esta superficie un flujo magnético total de un weber.

$$T = \frac{Wb}{m^2} = \frac{V \cdot s}{m^2} = \frac{kg}{s^2 \cdot A} = \frac{kg}{C \cdot s}$$

- *Weber o weberio (Wb).* Unidad de flujo magnético. Definición: un weber es el flujo magnético que al atravesar un circuito de una sola espira produce en la misma una fuerza electromotriz de 1 voltio si se anula dicho flujo en 1 segundo por decrecimiento uniforme.

$$Wb = V \cdot s = T \cdot m^2 = \frac{m^2 \cdot kg}{s^2 \cdot A}$$

- *Henry o henrio (H).* Unidad de inductancia. Definición: un henrio es la inductancia de un circuito en el que una corriente que varía a razón de un amperio por segundo da como resultado una fuerza electromotriz autoinducida de un voltio.

$$H = \frac{V \cdot s}{A} = \frac{m^2 \cdot kg}{s^2 \cdot A^2}$$

- *Radián (rad).* Unidad de ángulo plano. Definición: un radián es el ángulo que limita un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la circunferencia.

$$rad = \frac{m}{m} = 1$$

- *Lumen (lm).* Unidad de flujo luminoso. Definición: un lumen es el flujo luminoso producido por una candela de intensidad luminosa, repartida uniformemente en un estereorradián.

$$lm = cd \cdot sr$$

- *Lux (lx).* Unidad de iluminancia. Definición: un lux es la iluminancia producida por un lumen de flujo luminoso, en una superficie equivalente a la de un cuadrado de un metro de lado.

$$lx = \frac{cd \cdot sr}{m^2}$$

- *Grado Celsius (°C).* Unidad de temperatura termodinámica. La magnitud de un grado Celsius (1 °C) es igual a la de un kelvin. Definición:

t(ºC)=T(K)-273,15

donde *t* es la temperatura en grados Celsius y T en kélvines.

Unidades sin nombre especial

En principio, las unidades de base se pueden combinar libremente para formar otras unidades. A continuación, se dan las más importantes.

- *Unidad de área*. Definición: un metro cuadrado es el área equivalente a la de un cuadrado de 1 metro de lado.

$$\mathrm{m}^2$$

- *Unidad de volumen*. Definición: un metro cúbico es el volumen equivalente al de un cubo de 1 metro de lado.

$$\mathrm{m}^3$$

- *Unidad de velocidad o rapidez*. Definición: un metro por segundo es la velocidad de un cuerpo que, con movimiento uniforme, recorre una longitud de un metro en 1 segundo.

$$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

- *Unidad de ímpetu lineal o cantidad de movimiento*. Definición: es la cantidad de movimiento de un cuerpo con una masa de 1 kilogramo que se mueve con una velocidad instantánea de 1 metro por segundo.

$$\mathrm{N} \cdot \mathrm{s} = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

- *Unidad de aceleración*. Definición: es el aumento de velocidad regular que sufre un objeto, equivalente a un metro por segundo cada segundo.

$$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

- *Unidad de número de onda*. Definición: es el número de onda de una radiación monocromática cuya longitud de onda es igual a 1 metro.

$$\frac{1}{\mathrm{m}}$$

- *Unidad de velocidad angular*. Definición: es la velocidad de un cuerpo que, con una rotación uniforme alrededor de un eje fijo, gira en 1 segundo, 1 radián.

$$\frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{1}{\text{s}}$$

- *Unidad de aceleración angular*. Definición: es la aceleración angular de un cuerpo animado de una rotación uniformemente variada alrededor de un eje fijo, cuya velocidad angular varía 1 radián por segundo, en 1 segundo.

$$\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = \frac{1}{\text{s}^2}$$

- *Unidad de momento de una fuerza y torque*. Definición: es el momento o torque producido cuando una fuerza de un newton actúa a un metro de distancia del eje fijo de un objeto, impulsando la rotación del mismo.

$$\text{N} \cdot \text{m} = \frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}{\text{s}^2}$$

- *Unidad de viscosidad dinámica.* Definición: es la viscosidad dinámica de un fluido homogéneo, en el cual, el movimiento rectilíneo y uniforme de una superficie plana de 1 metro cuadrado, da lugar a una fuerza retardatriz de 1 Newton, cuando hay una diferencia de velocidad de 1 metro por segundo entre dos planos paralelos separados por 1 metro de distancia.

$$\text{Pa} \cdot \text{s} = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$$

- *Unidad de entropía.* Definición: es el aumento de entropía de un sistema que recibe una cantidad de calor de 1 Julio, a la temperatura termodinámica constante de 1 Kelvin, siempre que en el sistema no tenga lugar ninguna transformación irreversible.

$$\frac{\text{J}}{\text{K}} = \frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}{\text{s}^2 \cdot \text{K}}$$

- *Unidad de calor específico o capacidad calorífica.* Definición: es la cantidad de calor, medida en Julios, que, en un cuerpo homogéneo de una masa de 1 kilogramo, produce una elevación de temperatura termodinámica de 1 Kelvin.

$$\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{K}}$$

- *Unidad de conductividad térmica.* Definición: es la conductividad térmica de un cuerpo homogéneo isótropo, en la que una diferencia de temperatura de 1 Kelvin entre dos planos

paralelos, de área 1 metro cuadrado y distantes 1 metro, produce entre estos planos un flujo térmico de 1 vatio.

$$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}} = \frac{\mathrm{m}\cdot\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^3\cdot\mathrm{K}}$$

- *Unidad de intensidad del campo eléctrico*. Definición: es la intensidad de un campo eléctrico, que ejerce una fuerza de 1 Newton sobre un cuerpo cargado con una cantidad de electricidad de 1 culombio.

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{m}\cdot\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^3\cdot\mathrm{A}}$$

- *Unidad de rendimiento luminoso*. Definición: es el rendimiento luminoso obtenido de un artefacto que gasta un vatio de potencia y genera un lumen de flujo luminoso.

$$\frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{W}} = \frac{\mathrm{cd}\cdot\mathrm{sr}\cdot\mathrm{s}^3}{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{cd}\cdot\mathrm{s}^3}{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}}$$

Sistema Métrico Legal Argentino

El **SIMELA (Sistema Métrico Legal Argentino)** es el sistema de medidas que se utiliza en Argentina. Este sistema métrico adopta las mismas unidades, múltiplos y submúltiplos del Sistema Internacional (SI). El SIMELA fue establecido por la ley 19.511 de 1972, como único sistema de unidades de uso autorizado en Argentina.

Definición de las unidades de base

Magnitud	Unidad	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	gramo	g
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	amperio	A
Temperatura	Celsius	C
Intensidad luminosa	candela	Cd
Cantidad de sustancia	mol	mol

Definición de las unidades suplementarias

Magnitud	Unidad	Símbolo
Ángulo plano	radián	rad
Ángulo sólido	estereorradián	sr

Definición de las unidades derivadas

Magnitud	Unidad	Símbolo	
Superficie	metro cuadrado	m^2	
Volumen	metro cúbico	m^3	
Frecuencia	hercio	Hz	1 Hz=1 ciclo/s
Densidad	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3	
Velocidad	metro por segundo	m/s	
Velocidad angular	radián por segundo	rad/s	
Aceleración	metro por segundo al cuadrado	m/s^2	
Aceleración angular	radián por segundo al cuadrado	rad/s^2	
Fuerza	newton	N	1N=1 kg m/s2
Presión (tensión mecánica)	pascal	Pa	1 Pa=1 N/m^2
Viscosidad cinemática	metro cuadrado por segundo	m^2/s	
Viscosidad dinámica	newton por segundo por metro cuadrado	$N\ s/m^2$	
Trabajo, energía o cantidad de calor	julio	J	1 J=1 N m
Potencia	vatio	W	1 W=1 J/s
Cantidad de electricidad	coulomb	C	1 C=1 A s
Tensión eléctrica, diferencia de potencial o fuerza electromotriz	voltio	V	1 V=1 W/A
Intensidad de campo eléctrico	voltio por metro	V/m	
Resistencia eléctrica	ohm	Ω	1 Ω=1 V/A
Conductancia eléctrica	siemens	S	1 S=1 Ω-1
Capacidad eléctrica	faradio	F	1 F=1 A s/V
Flujo de inducción magnética	weber	Wb	1 Wb=1 V s
Inductancia	henrio	H	1 H=1 V s/A
Inducción magnética	tesla	T	1 T=1 Wb/m^2
Intensidad de campo magnético	amperio por metro	A/m	
Fuerza magnetomotriz	amperio	A	
Flujo luminoso	lumen	Lm	1 lm=1 cd sr
Luminancia	candela por metro cuadrado	cd/m^2	
Iluminación	lux	Lx	1 lx=1 lm/m^2
Número de ondas	uno por metro	m^{-1}	
Entropía	julio por kelvin	J/K	
Calor específico	julio por kilogramo kelvin	J/kg K	
Conductividad térmica	vatio por metro kelvin	W/m K	
Intensidad energética	vatio por estereorradián	W/sr	
Actividad de una fuente radiactiva	uno por segundo	s^{-1}	

Principios fundamentales de la estática

Recordemos que se designa como principio físico una ley universal obtenida empíricamente. Los principios físicos se verifican experimentalmente y no son demostrados mediante razonamientos. En cambio, las leyes físicas son el resultado de un razonamiento deductivo

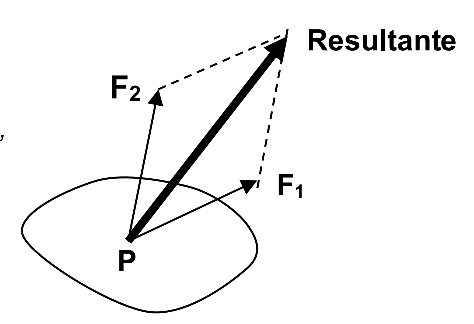
El estudio de la estática se funda en cuatro principios físicos llamados principios fundamentales o postulados de la estática.

Ley del paralelogramo de las fuerzas o principio vectorial de fuerzas

Este principio vectorial de fuerzas se debe a Stevinius, quien en 1586 lo utilizó en sus trabajos, pero sin enunciarlo formalmente. Según Mach, el primero en enunciarlo en forma clara y precisa fue Newton.

Consideremos, un cuerpo rígido y dos fuerzas F_1 y F_2 aplicadas a un punto P de dicho cuerpo. Este enunciado dice:

Dos fuerzas que actúan simultáneamente sobre un punto material pueden ser reemplazadas por una única fuerza, llamada resultante, aplicada en el mismo punto y cuya intensidad y dirección quedan definidas por la diagonal del paralelogramo que tiene por lados los vectores representativos de las fuerzas dadas.



Decir que pueden ser reemplazadas las primeras, llamadas componentes, por su resultante significa que son equivalentes por producir el mismo efecto físico sobre el cuerpo rígido. Este principio establece implícitamente que la equivalencia física entre las fuerzas componentes y su resultante corresponde a la equivalencia geométrica entre los vectores representativos de las componentes y el vector suma de los mismos.

Generalizando este principio a un mayor número de fuerzas se puede expresar:

"*Un conjunto de fuerzas que actúan simultáneamente sobre un mismo punto material puede ser sustituido por una sola fuerza actuante sobre dicho punto y determinada por la suma vectorial de todos los vectores representativos de las fuerzas que componen el conjunto*"

Principio de equilibrio estático

Es solo un caso particular de la ley fundamental de la mecánica (2º Ley de Newton). Cuando sobre un cuerpo material actúa una o mas fuerzas adquirirá una aceleración de dirección y sentido coincidentes con la dirección y sentido de la resultante de las fuerzas, y de intensidad proporcional a la de esta resultante. Su expresión matemática queda dada por la ecuación:

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$$

F: resultante
a: aceleración
m: masa del punto material

Mecánicamente la masa expresa el factor de proporcionalidad existente entre la fuerza actuante y la aceleración adquirida.

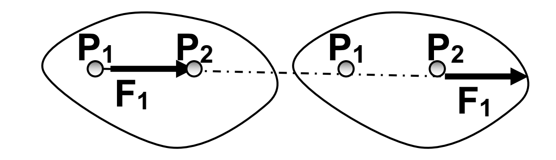
A la **estática** le interesa el caso particular que se presenta cuando el punto material se encuentra en reposo. En dicho caso la aceleración es nula, y la resultante también lo será $\sum \vec{F} = 0$. De esta manera podemos expresar el principio de equilibrio estático de la siguiente manera (1º Ley de Newton ó principio de Inercia)

Cuando la resultante de un conjunto de fuerzas actuantes sobre un punto material es nula, éste permanece en reposo, si originalmente estaba en reposo, o continua con movimiento rectilíneo uniforme, si originalmente estaba en movimiento.

Para que dos fuerzas se equilibren, es necesario que sean opuestas, entendiéndose por opuestas aquellas que, teniendo la misma recta de acción, son de igual intensad y sentido contrario: *El equilibrio de un sistema de fuerzas no se altera si se le agrega o quita un sistema nulo.*

Principio de transmisibilidad de una fuerza

Una fuerza que actúa sobre un cuerpo rígido no altera su efecto si se desplaza su punto de aplicación a lo largo de su recta de acción.



Principio de acción y reacción

También la podemos identificar como la 3º Ley de Newton, o Principio de Interacción o Principio de Acción y Reacción

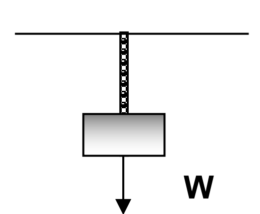
F F F'

Si un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro,

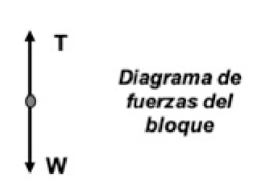
el segundo ejerce siempre sobre el primero
otra fuerza de la misma intensidad, pero
de sentido opuesto.

Estas fuerzas que forman los pares de interacción están aplicadas sobre cuerpos diferentes, y se denominan corrientemente acción y reacción.

Por ejemplo, si consideramos un cuerpo de peso **W** pendiente de una cuerda vertical



Sobre el bloque actúan una fuerza de contacto, la fuerza de atracción ejercida hacia arriba por la cuerda **T**, y también una fuerza de acción a distancia, la atracción gravitatoria de la tierra dirigida hacia abajo, o peso del bloque **W,** esto lo observamos en el diagrama de fuerzas del bloque

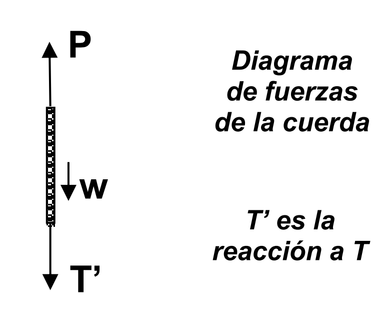


Por la primera ley de Newton $\sum \vec{F}_y = 0$ ➡ T – W = 0 ➡ T = W deducimos que la cuerda tira del bloque hacia arriba con una fuerza igual a la atracción hacia abajo que la Tierra ejerce sobre él.

Observamos que T y W son iguales y opuestas, pero cualquiera de ellas ***no es la reacción de la otra.***

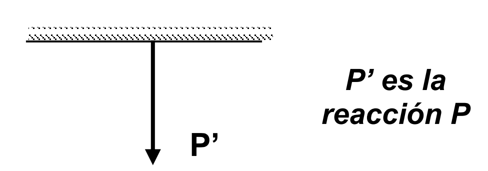
La reacción a **W** tiene que ser igual y opuesta a la fuerza ejercida por la Tierra sobre el bloque, es decir si la Tierra atrae al bloque con una fuerza **W**, el bloque también atrae a la tierra con una fuerza **W'**

La reacción a la fuerza **T** es otra igual dirigida hacia abajo, ejercida por el bloque sobre la cuerda **T',** que lo observamos en el diagrama de fuerzas de la cuerda. Las otras fuerzas que actúan sobre la cuerda son su peso propio **W** y la fuerza **P** ejercida hacia arriba sobre ella, en su extremo superior, por el techo



La cuerda está en equilibrio $\sum \vec{F}_y = 0$ ➡ P - T – W = 0 ➡P = T+ W

Finalmente, puesto que la cuerda tira del techo hacia abajo con una fuerza igual a la que ejerce éste hacia arriba sobre la cuerda (tercera ley), la fuerza ejercida hacia abajo sobre el techo es **P'**



Si el peso de la cuerda es despreciable, el valor de **T’** = **P**, puesto que **P** y **P’** son iguales. La tracción hacia abajo **P’** sobre el techo, es igual a la tracción hacia abajo **T’** sobre el extremo inferior de la cuerda, es decir, *una cuerda sin peso puede transmitir una fuerza de un extremo a otro sin modificarla*

Una cuestión interesante para tener en cuenta es que las fuerzas de un par de interacción aparecen en forma simultánea. Si está una de ellas, está la otra, y si deja de ejercerse alguna, también deja de hacerlo la otra.

Sistemas de fuerzas

Vamos a analizar qué sucede si sobre un cuerpo actúan varias fuerzas en forma simultánea, es decir que el cuerpo rígido esta sometido a un sistema de fuerzas. A cada una de ellas la llamaremos componente del sistema.

Sistemas de fuerzas

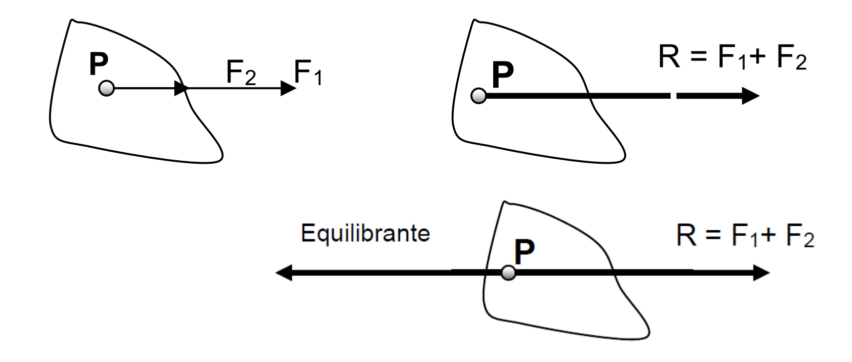
- ***Colineales***
- ***Concurrentes***
- ***No concurrentes***
- ***Paralelas***

Fuerzas colineales

Son fuerzas que actúan en la misma recta de acción, pueden tener igual sentido o sentido

Si las fuerzas actúan sobre una partícula de un cuerpo rígido constituyen un sistema de fuerzas concurrentes, en caso de actuar en distintas partículas del cuerpo rígido se llama sistema de fuerzas no concurrentes que trataremos más adelante. En ambos casos el conjunto de fuerzas puede ser coplanar o no.

contrario. Su resultante será la suma algebraica de las fuerzas $\sum \vec{F} = \vec{R}$. Si quisiéramos producir el equilibrio en el sistema, seria suficiente aplicar una fuerza de igual intensidad y sentido contrario.



El cuerpo está en equilibrio

Actividad

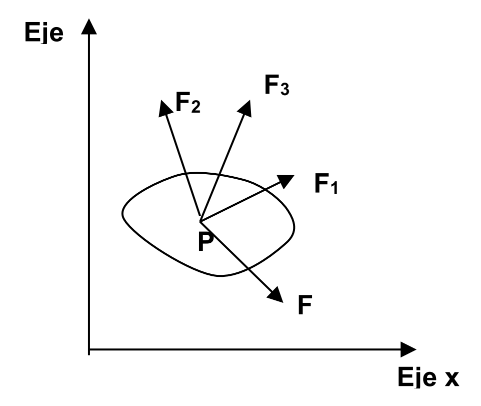
1. Tres personas tiran del extremo de una cuerda, ejerciendo cada una de ellas fuerzas de 2 $\overrightarrow{Kg.}$, 4 $\overrightarrow{Kg.}$ y 2,5 $\overrightarrow{Kg.}$; del otro extremo cuatro personas tiran en sentido contrario con fuerzas de 5 $\overrightarrow{Kg.}$, 2 $\overrightarrow{Kg.}$, 1 $\overrightarrow{Kg.}$ y 1,5 $\overrightarrow{Kg.}$ respectivamente. ¿Qué grupo arrastra al otro y con qué fuerza?

2. Sobre un cuerpo se aplican tres fuerzas colineales cuyos módulos son, respectivamente 6 $\overrightarrow{Kg.}$, 2 $\overrightarrow{Kg.}$ y 7 $\overrightarrow{Kg.}$ Las dos primeras tienen el mismo sentido, contrario a la tercera.

2.1 Determinar gráfica y analíticamente la resultante del sistema de fuerzas.

2.2 Determinar el módulo, la dirección y el sentido de la equilibrante del sistema.

Fuerzas concurrentes



Procedimientos gráficos

Método del Paralelogramo

Dadas dos fuerzas concurrentes **F1** y **F2**, aplicadas en un punto O, (figura nº 1) su resultante **R** es igual a la fuerza representada por la diagonal del paralelogramo construído tomando por lados los módulos de los vectores que representan a las fuerzas dadas (1er Principio de la Estática). Primeramente, debemos elegir una escala adecuada $E = \frac{\overrightarrow{Kg}}{cm}$; trazamos por el extremo de **F1** una recta paralela a la dirección de **F2** y por el extremo de **F2** una recta en dirección paralela a **F1**. De esta manera queda trazado un paralelogramo y la resultante **R** del sistema es la diagonal de ese paralelogramo ubicando su origen en el origen de las fuerzas. Conociendo la escala en la que trabajamos y midiendo la diagonal podemos calcular el módulo de la resultante. Si tenemos más de dos fuerzas concurrentes (figura nº2), debemos repetir el

método del paralelogramo varias veces para ir calculando la resultante del sistema a partir de las resultantes parciales obtenidas

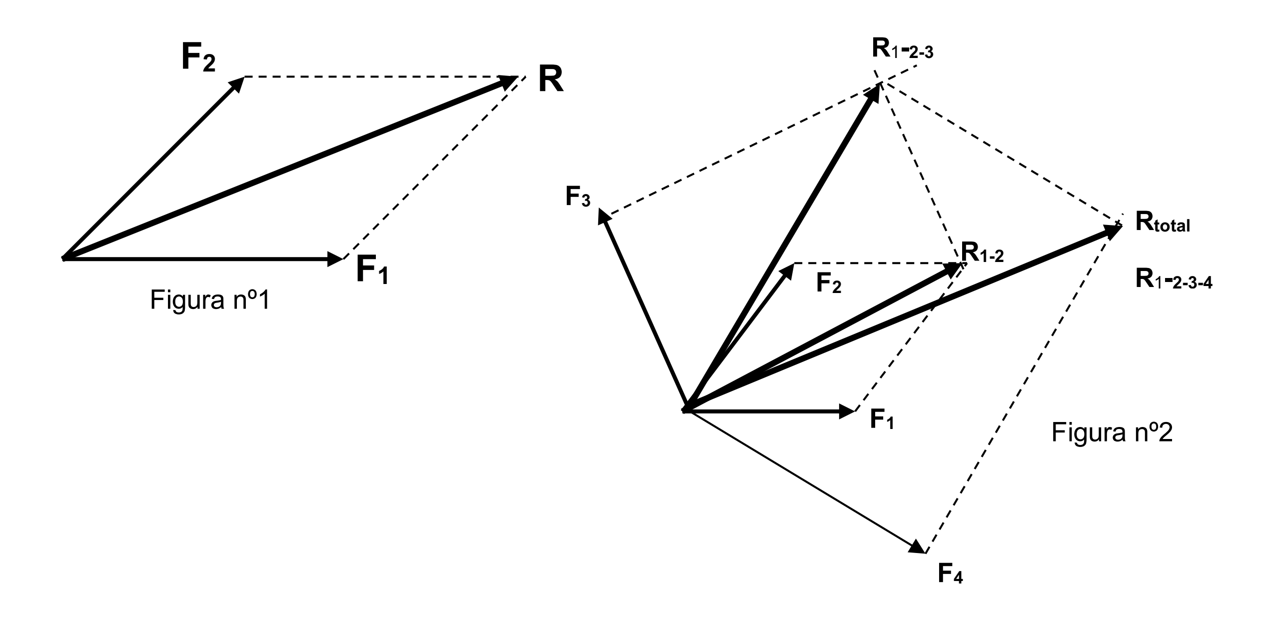


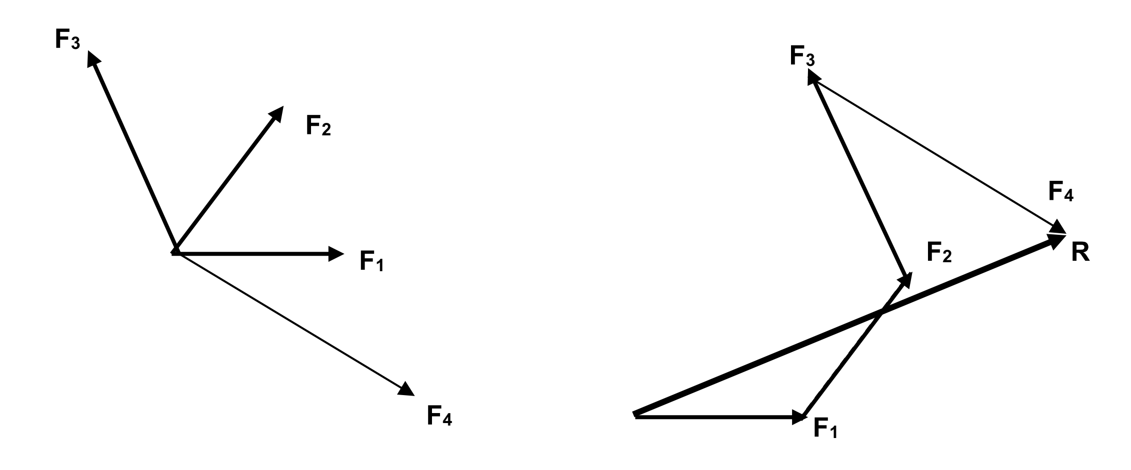
Figura nº1

Figura nº2

Método de la Poligonal (Polígono Vectorial)

Consiste en ir formando una poligonal cuyos lados sean las fuerzas ubicadas sucesivamente haciendo coincidir su origen con el extremo de la anterior, con su correspondiente dirección y sentido. El resultado es independiente del orden en que se ubiquen las fuerzas.

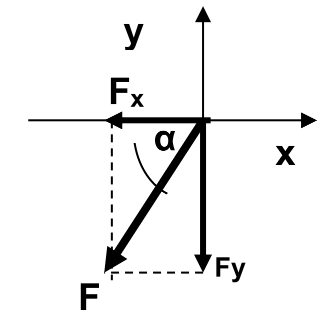
Dado el mismo sistema de fuerzas concurrentes de la Figura nº 2, vamos a hallar R utilizando este método:



Procedimiento analítico

Se puede expresar analíticamente una fuerza **F** por su módulo y el ángulo α que ella forma con la paralela a la rama positiva de un eje de referencia trazada por su punto de aplicación; si proyectamos a **F** sobre los ejes, resultan sus dos componentes ortogonales

$$F_x = F\cos\alpha \qquad F_y = Fsen\alpha$$

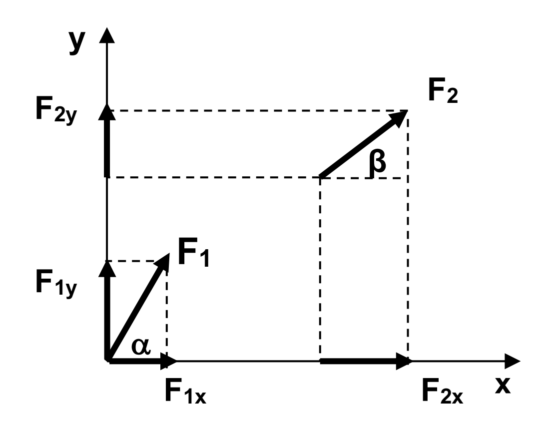


Inversamente conocidas las componentes ortogonales F_x y F_y la fuerza F queda determinada en posición, sentido y magnitud por las siguientes expresiones:

$$tg\alpha = \frac{F_y}{F_x} \qquad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

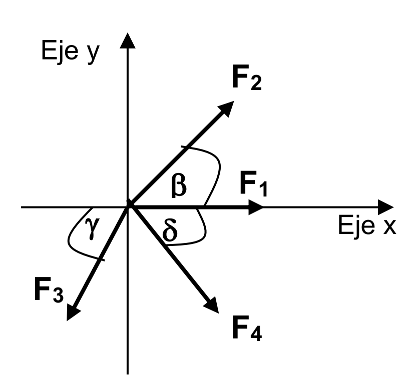
Para el caso particular de la gráfica con dos fuerzas diferentes **F₁** y **F₂** tenemos:

$$F_{1x} = F_1\cos\alpha \quad ; \quad F_{1y} = F_1 sen\alpha$$
$$F_{2x} = F_2\cos\beta \quad ; \quad F_{2y} = F_2 sen\beta$$



Por ejemplo al hallar la resultante del siguiente sistema de fuerzas

Fuerzas	Ángulos
F_1 =15 $\overrightarrow{Kg.}$	α = 0º
F_2 =10 $\overrightarrow{Kg.}$	β = 30º
F_3 =25 $\overrightarrow{Kg.}$	γ = 60º
F_4 =20 $\overrightarrow{Kg.}$	δ = 45º



Proyectamos cada fuerza sobre cada uno de los ejes y sumamos algebraicamente

$R_x = \sum F_x$ = F_1.cos α + F_2 cos β – F_3 cos γ + F_4 cos δ

$R_y = \sum F_y$ = F_1.sen α + F_2 sen β – F_3 sen γ - F_4 sen δ

	ángulo	cos α_i	sen α_i	F_x = F cosα_i	F_y = F sen α_i
F_1 = 15 $\overrightarrow{Kg.}$	α=0º	1	0	15 $\overrightarrow{Kg.}$	0 $\overrightarrow{Kg.}$
F_2 = 10 $\overrightarrow{Kg.}$	β=30º	0,866	0,5	8,66 $\overrightarrow{Kg.}$	12,5 $\overrightarrow{Kg.}$
F_3 = 25 $\overrightarrow{Kg.}$	γ =60º	0,5	0,866	12,5 $\overrightarrow{Kg.}$	8,66 $\overrightarrow{Kg.}$
F_4 =20 $\overrightarrow{Kg.}$	δ =45º	0,707	0,707	14,41 $\overrightarrow{Kg.}$	14,41 $\overrightarrow{Kg.}$

R_x = 15 $\overrightarrow{Kg.}$+ 8, 66 $\overrightarrow{Kg.}$–12,5 $\overrightarrow{Kg.}$+14,41 $\overrightarrow{Kg.}$ = -3.25 $\overrightarrow{Kg.}$ ⟹ $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

R_y = 12,5 $\overrightarrow{Kg.}$– 8,66 $\overrightarrow{Kg.}$– 14.41 $\overrightarrow{Kg.}$= -10.57 $\overrightarrow{Kg.}$

$R = \sqrt{(-3{,}25\overrightarrow{Kg})^2 + (-10.57\overrightarrow{Kg})^2}$ = 11,05 $\overrightarrow{Kg.}$

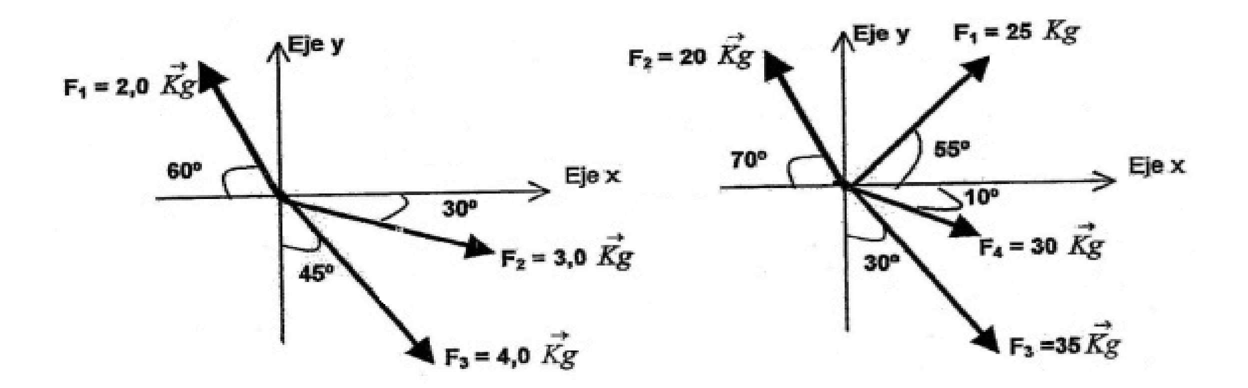
$tg\alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{10.57\vec{Kg}}{3.25\vec{Kg}}$ ⟹ α = 72º53'50''

Actividad

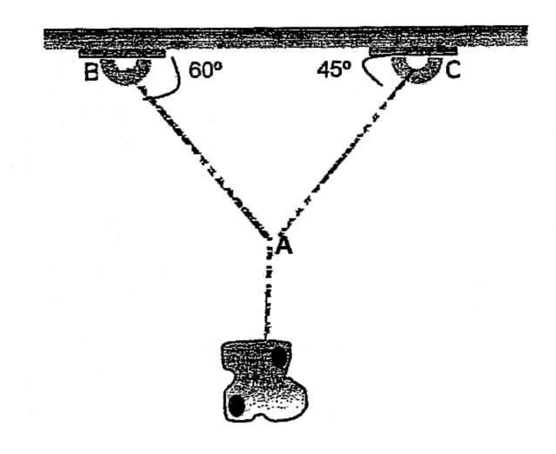
1. Un lanchón colocado en el centro de un canal está amarrado por cables que forman un ángulo de 30° con el eje del canal. En cada cable hay un dinamómetro que indica 40 $\overrightarrow{Kg.}$
   1.1 ¿Qué fuerza ejerce la corriente sobre el lanchón?
   1.2 Si esta fuerza fuera de 100 $\overrightarrow{Kg.}$, ¿cuánto indicarían los dinamómetros?

2. En dos postes distanciados 40 m. están atados a la misma altura los extremos de un cable de 44 m. de longitud y peso despreciable. Calcular la tensión del cable si de su punto medio pende un cuerpo que pesa 2200 $\overrightarrow{Kg.}$

3. Determinar el módulo de la resultante de cada uno de los siguientes sistemas de fuerzas gráfica y analíticamente.



4. El motor de la figura está suspendido por un sistema de cables. La masa del motor es de 100 Kg. ¿Qué valores tienen las tensiones en los cables AB y AC?

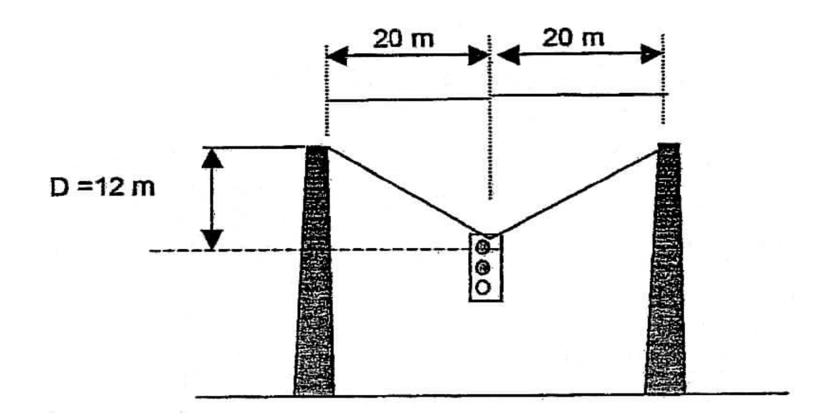


Nota: Recordamos que el peso de un cuerpo es P = m.g

5. Un semáforo de 140 $\overrightarrow{Kg}$. pende de dos cables.

5.1 ¿Cuál es la tensión en los cables?

5.2 ¿Cuál sería la tensión si el valor de D es la mitad?



Fuerzas Paralelas

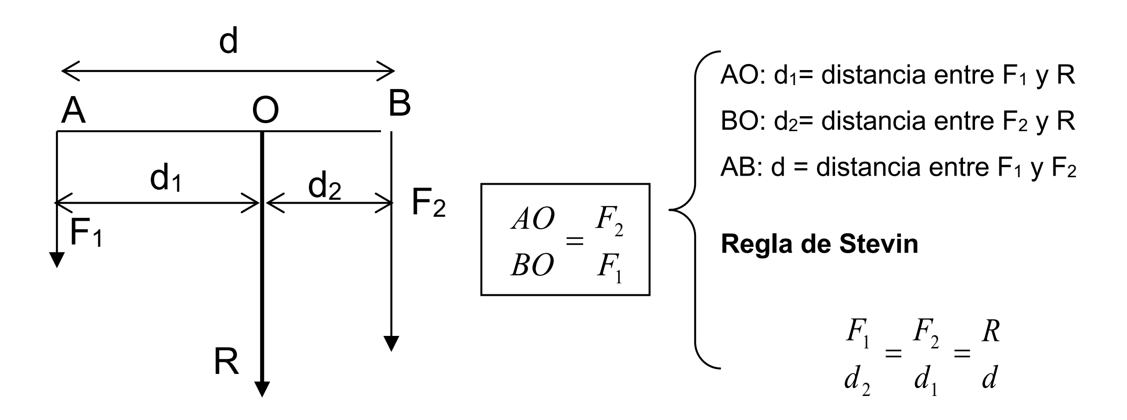
Los sistemas de fuerzas paralelas constituyen un caso especial de los sistemas de fuerzas concurrentes, en que el punto de concurrencia es el punto impropio de la dirección de las fuerzas.

Para hallar la resultante de estos sistemas no podemos aplicar el método del paralelogramo de fuerzas. La solución gráfica del problema la vamos a obtener de la siguiente manera

Fuerzas paralelas de igual sentido

La resultante **R** de dos fuerzas **F_1** y **F_2**, paralelas y del mismo sentido, cumple las siguientes condiciones:

- ✓ Es paralela y del mismo sentido que las componentes
- ✓ Su intensidad es igual a la suma de las intensidades de las componentes ⇨ $R = F_1 + F_2$
- ✓ El punto **O**, de aplicación, interior al segmento AB, lo divide en partes inversamente proporcionales a las intensidades de las fuerzas.



$d = d_1 + d_2$

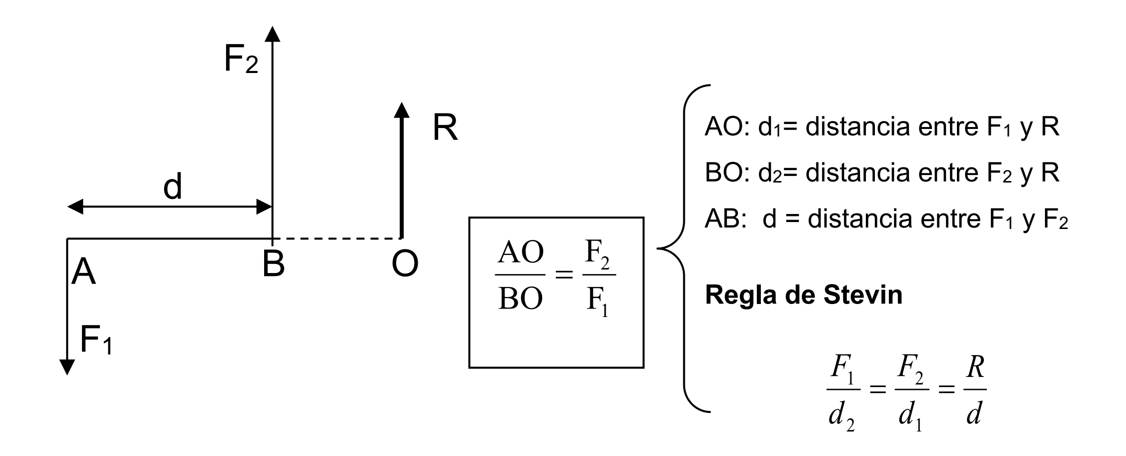
d: distancia entre fuerzas

Fuerzas paralelas de sentido contrario

La resultante **R** de dos fuerzas **F_1** y **F_2**, paralelas y de sentido contrario, cumple las siguientes condiciones:

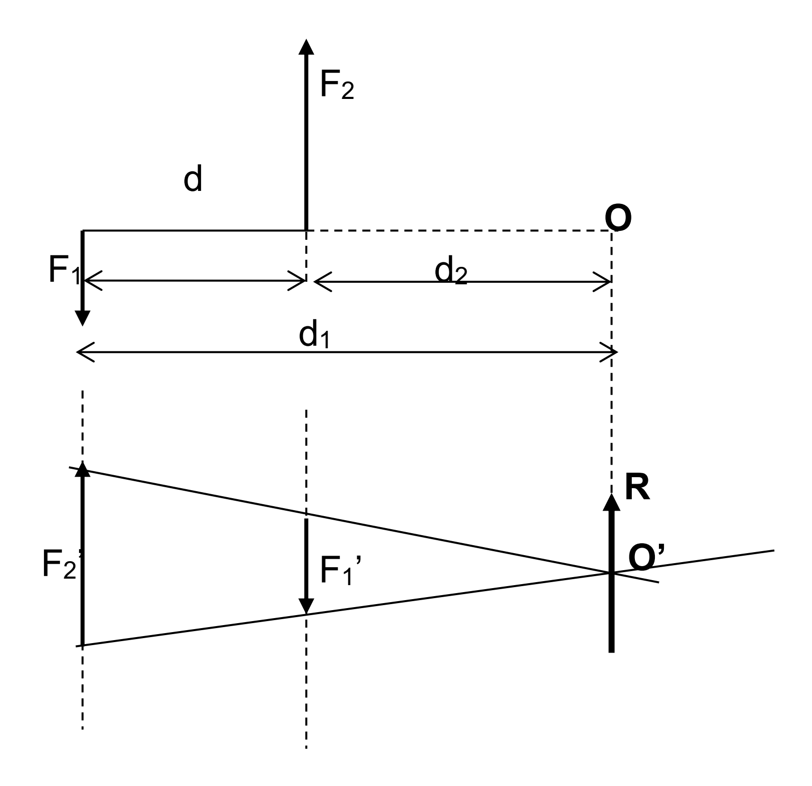
- ✓ Es paralela y del sentido de la mayor de las componentes.
- ✓ Su intensidad es igual a la diferencia de las intensidades de las componentes ⇨ $R = F_1 - F_2$

✓ El punto **O**, de aplicación, exterior al segmento AB, situado del lado de la fuerza de mayor intensidad



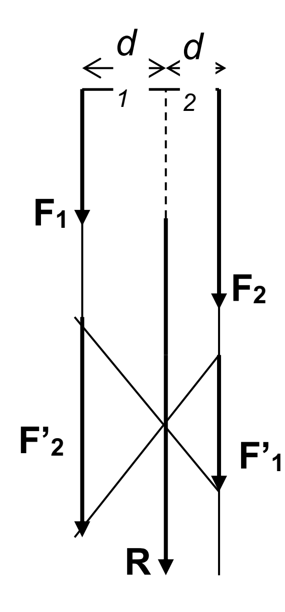
Método gráfico

Dadas dos fuerzas **F_1** y **F_2**, paralelas y de sentido contrario, para determinar gráficamente la posición de la recta de acción de la resultante, procedemos de igual manera que el caso anterior



Por ejemplo: para hallar la resultante en forma gráfica y analítica de las siguientes fuerzas : paralelas $F_1 = 20\ \vec{Kg}$ $F_2 = 30\ \vec{Kg}$ separadas entre sí 2 cm. Suponemos que las fuerzas: a) igual sentido b) sentido contrario.

Elegimos una escala de fuerza adecuada $E = \frac{10\vec{Kg}}{cm}$



Regla de Stevin

$$\frac{F_1}{d_2} = \frac{F_2}{d_1} = \frac{R}{d},\ d = d_1 + d_2$$

$$R = 20\ \vec{Kg} + 30\ \vec{Kg}$$

$$\frac{20\vec{Kg}}{d_2} = \frac{30\vec{Kg}}{d_1} = \frac{50\vec{Kg}}{2cm}$$

$$d_1 = \frac{30\vec{Kg} \bullet 2cm}{50\vec{Kg}} = 1{,}2\ \text{cm}$$

$$d_2 = \frac{20\vec{Kg} \bullet 2cm}{50\vec{Kg}} = 0{,}8\ \text{cm}$$

Resolver en forma analítica y gráfica el caso b).

Actividades

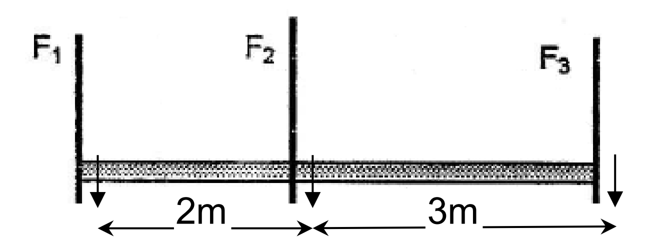
1. Dos personas llevan, mediante una barra rígida una carga de 80 $\overrightarrow{Kg}$. La longitud de la barra es de 2m., y la carga dista 0,8 m. de la persona que va adelante. ¿Qué fuerza hace cada persona? ¿Qué ocurriría si la carga se coloca en el centro de la barra?

2. En una barra de hierro de 2,4 m. apoyada en uno de sus extremos, se ha colgado un cuerpo de 0,12 Tn. y a 60 cm. de uno de los extremos. ¿Cuál será la fuerza necesaria que se debe ejercer en cada extremo, para encontrar en equilibrio el sistema?

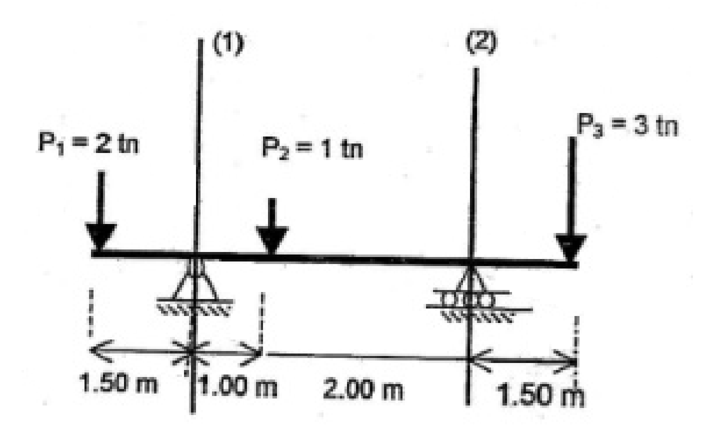
3. La resultante de un sistema de fuerzas paralelas de igual sentido vale 45 $\overrightarrow{Kg}$. Una de las componentes es de 10 $\overrightarrow{Kg}$., y se encuentra a 1 m. de la resultante. Hallar la distancia a que se encuentran dichas fuerzas.

4. Dos personas transportan una carga de 290 $\overrightarrow{Kg}$. mediante una barra de 2,5 m. de longitud apoyada sobre sus hombros. La carga dista 1m. del que marcha adelante. ¿Qué fuerza soporta cada hombre?

5. Hallar en forma gráfica y analítica la resultante entre las fuerzas indicadas: $F_1 = 2$ Tn., $F_2 = 4$ Tn. y $F_3 = 7$ Tn.,

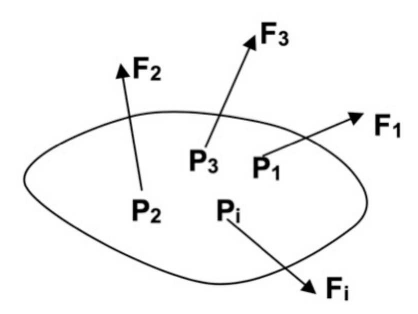


6. Determinar las reacciones de la siguiente viga, de acuerdo a las direcciones indicadas.



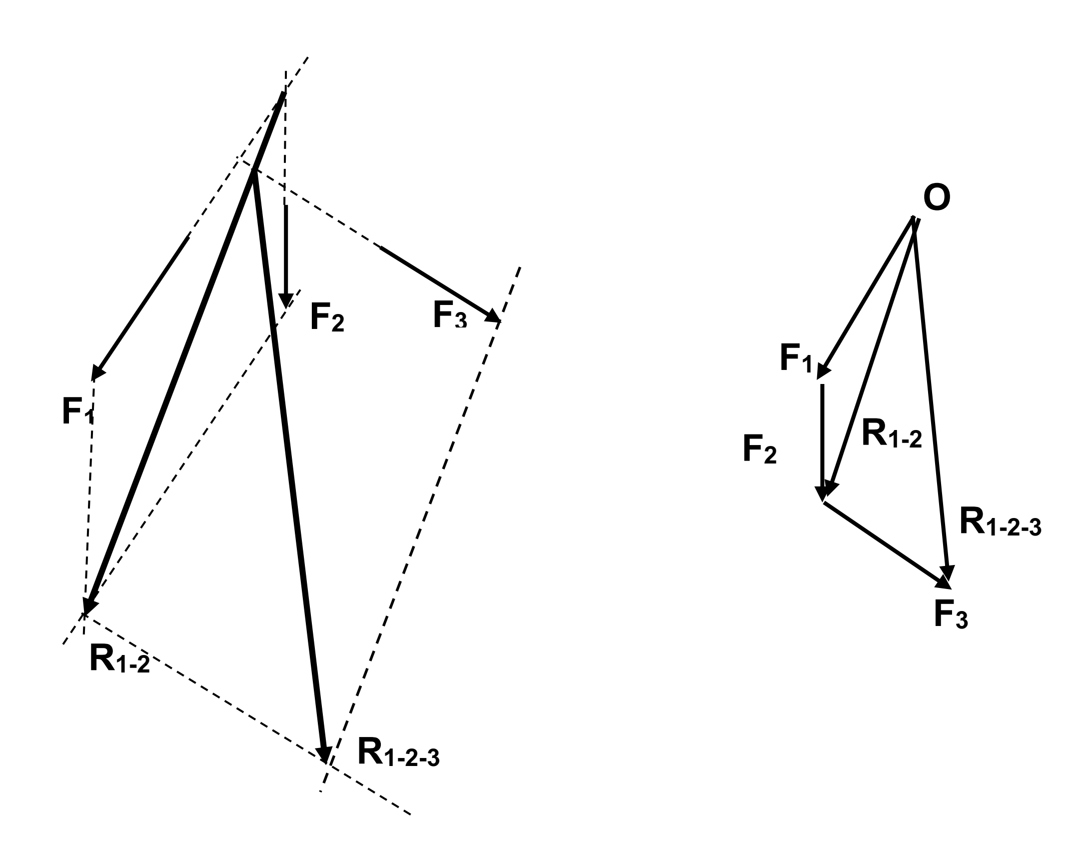
Fuerzas no concurrentes

Sea un sistema de fuerzas no concurrentes, si queremos hallar la resultante, el trazado del polígono de fuerzas no es suficiente para definirla.



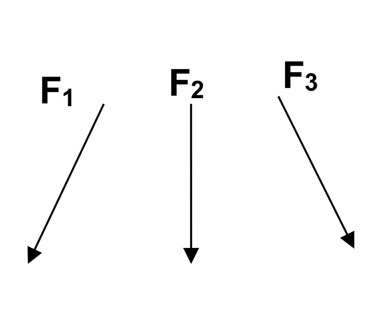
Un primer procedimiento, para hallar la resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes, consiste en determinar la resultante de dos cualesquiera de ellas por aplicación del principio del paralelogramo de fuerzas, deslizar dicha resultante parcial hasta el punto de intersección de su recta de acción con otra cualquiera de las fuerzas, componerla con las

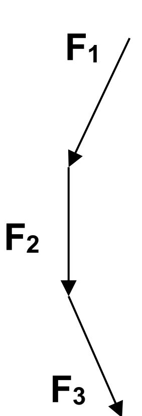
misma y procediendo en forma similar con las restantes fuerzas, llegar a obtener la resultante buscada.



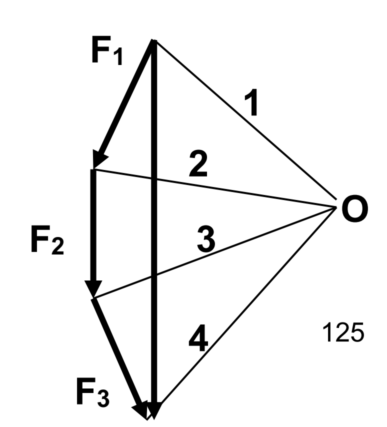
Para poder resolver gráficamente estos sistemas de fuerzas cuando tenemos más de tres fuerzas es conveniente utilizar el *polígono funicular*.

Primeramente, elegimos una escala adecuada y trazamos el polígono de fuerzas, llevando una fuerza a continuación de la otra, tal cual lo realizamos en fuerzas concurrentes



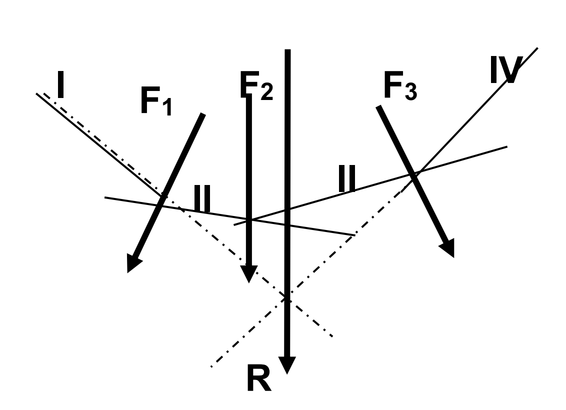


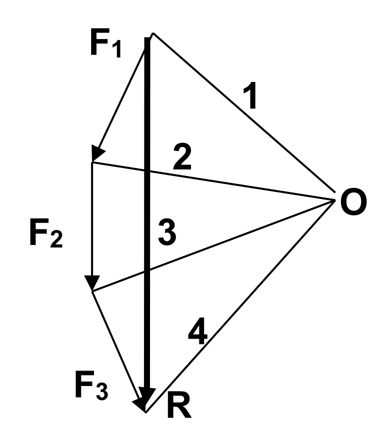
Elegimos un centro arbitrario que lo llamaremos *polo* del polígono funicular **O**, proyectamos desde el centro O, cada origen y extremo de la fuerza, obteniendo segmentos, llamados *rayos polares*. La Resultante será la suma de las fuerzas, es decir



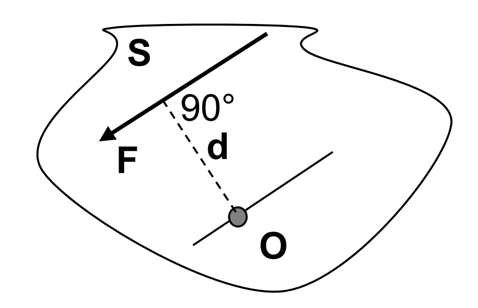
del inicio de F_1 al extremo de F_3. De esta manera
encontramos la intensidad y dirección de la resultante,
pero no su punto de aplicación

Para hallar el punto de aplicación de la resultante trazamos por un punto cualquiera del plano una recta paralela al rayo **1**, llamándola **I,** donde corta a la fuerza, trazamos la paralela al rayo **2**, llamándola **II** y así sucesivamente hasta el último rayo
Prolongamos el primer rayo y el último hasta que se corten, así hallamos un punto de intersección, que es el punto de la recta de acción de la resultante del sistema, quedando así completamente definida**.**





Momento de una fuerza respecto de un punto



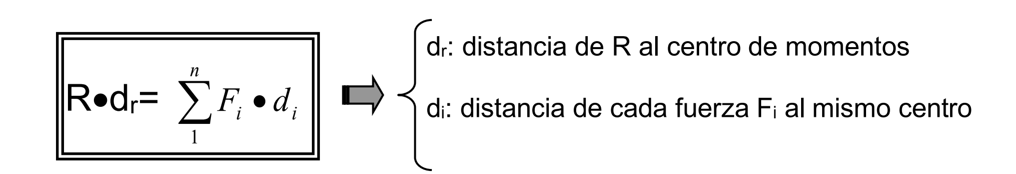
Se denomina momento estático de una fuerza o de primer orden, lineal o simplemente momento de una fuerza **F**, respecto de un punto **O** (centro de momentos o polo) al producto de la intensidad de la fuerza por la distancia **d** (brazo de palanca de la fuerza) del punto a la línea de acción de **F.**

La unidad de medida del momento estático puede ser kilogramo-metro, tonelada–metro, Newton-metro, etc.

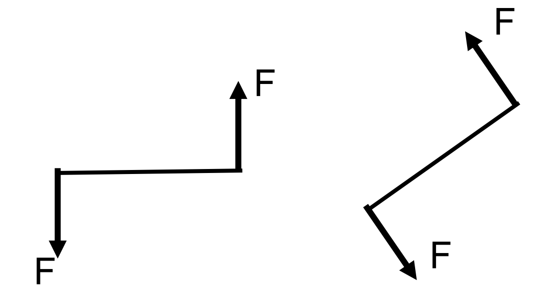
Si la chapa **S** esta sostenida con un perno en el punto **O**, el efecto cinemático de la fuerza **F**, respecto de **O**, es una rotación de la misma, en sentido negativo si gira según las agujas del reloj y positivo en sentido opuesto.

Para un sistema de varias fuerzas puede enunciarse la siguiente ley (Teorema de Varignon):

"El momento de la resultante de un sistema de fuerzas coplanares, respecto de un punto, es igual a la suma algebraica de los momentos de las fuerzas componentes, respecto del mismo punto"



Cuplas



Un sistema de dos fuerzas paralelas, de igual intensidad y sentido contrario, constituye una cupla o par de fuerzas.

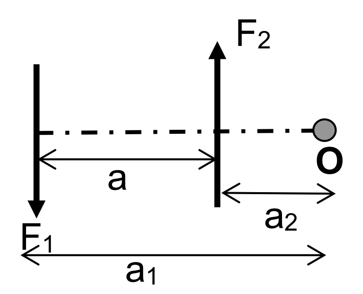
Aplicando la regla para la composición de fuerzas paralelas, recordamos que la intensidad de la resultante es igual a la suma algebraica de las intensidades de las fuerzas, por lo tanto, será nula.

Sin embargo, el efecto de una cupla no es nulo sobre el cuerpo en que actúa, pues produce una rotación; se caracterizara, entonces, no por una resultante, sino por un momento

<u>Momento de una Cupla</u>: es el producto de una de sus fuerzas **F**, por la distancia que separa ambas rectas de acción.

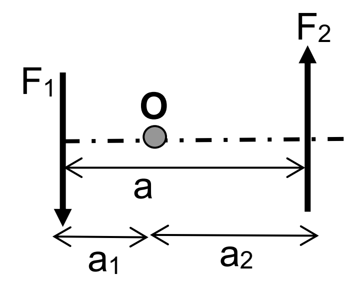
$$M = F \bullet a$$

Es fácil de demostrar que el momento de la cupla es independiente del centro de momentos, recordemos que el módulo de $F_1 = F_2 = F$



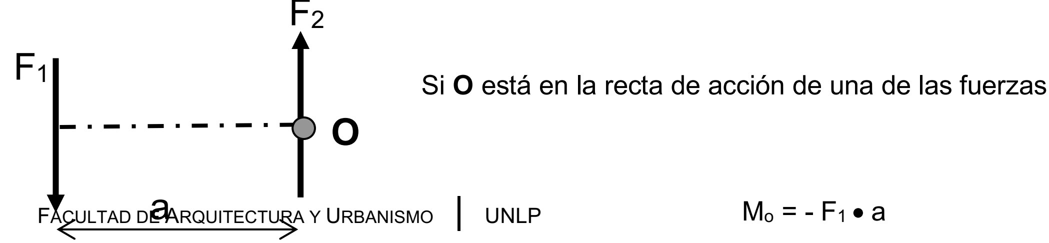
Si **O** está en el exterior del brazo de palanca tenemos:

$M_o = -F_1 \bullet a_1 + F_2 \bullet a_2 = F \bullet (-a_1 + a_2) = -F \bullet (a_1 - a_2) = -F \bullet a$



Si **O** está en el interior del brazo de palanca tenemos:

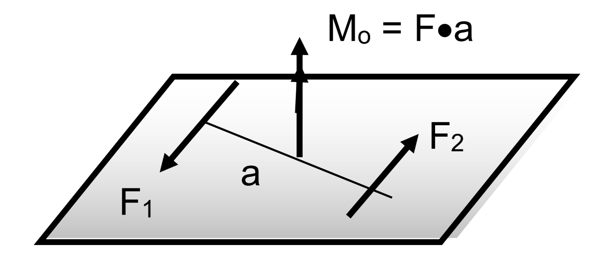
$M_o = -F_1 \bullet a_1 - F_2 \bullet a_2 = F \bullet (-a_1 - a_2) = -F \bullet (a_1 + a_2) = -F \bullet a$



Si **O** está en la recta de acción de una de las fuerzas

$M_o = - F_1 \bullet a$

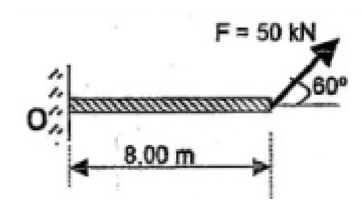
Una cupla puede ser representada por un vector perpendicular a su plano (o sea dirigido en la dirección común a los ejes de las rotaciones que podrían producir) y cuyo módulo es el momento M = F•a



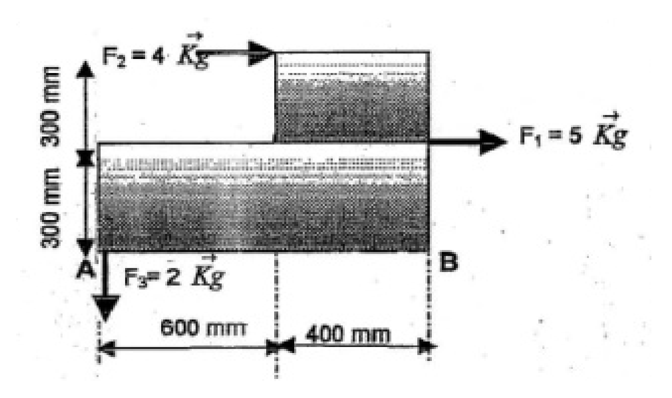
El vector tiene un sentido tal que, vista desde su extremidad, la cupla tiene momento positivo. Un tirabuzón girando en el sentido de rotación de la cupla progresa en el sentido del vector momento que la representa.

Actividades

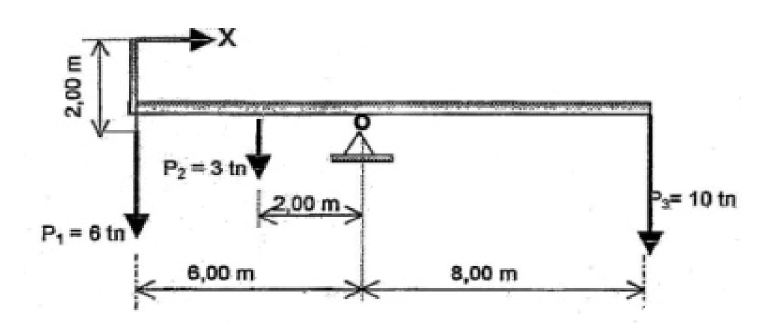
1. Determinar el momento de la fuerza de 50 $\overrightarrow{Kg}.$ respecto de O.



2. Determinar la suma de los momentos de las tres fuerzas respecto del punto A y del punto B.

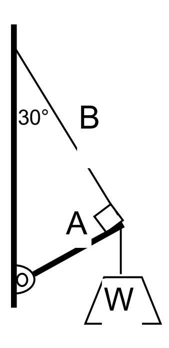


3. Determinar la intensidad y el sentido de la fuerza X que actúa sobre la palanca de la figura para que el sistema indicado esté en equilibrio.



4. Tres ladrillos idénticos están atados entre sí por medio de cuerdas y penden de una balanza que marca en total 24 N. ¿Cuál es la tensión de la cuerda que soporta al ladrillo inferior? ¿Cuál es la tensión en la cuerda que se encuentra entre el ladrillo del medio y el superior?

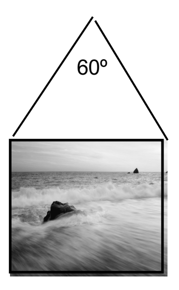
5. Si la cuerda B de la figura se rompe cuando su tensión es mayor de 400 N. ¿cuál es el peso máximo W?



6. Un cable está tendido sobre dos postes colocados con una separación de 10m. A la mitad del cable se cuelga un letrero que provoca un pandeo, por lo cual el cable desciende verticalmente una distancia de 50 cm. Si la tensión en cada segmento del cable es de 2000 N. ¿Cuál es el peso del letrero?

7. Un semáforo de 80 N. cuelga del punto medio de un cable de 30 m. tendido entre dos postes. Halle la tensión en cada segmento del cable si éste tiene un pandeo que lo hace descender una distancia vertical de 1m.

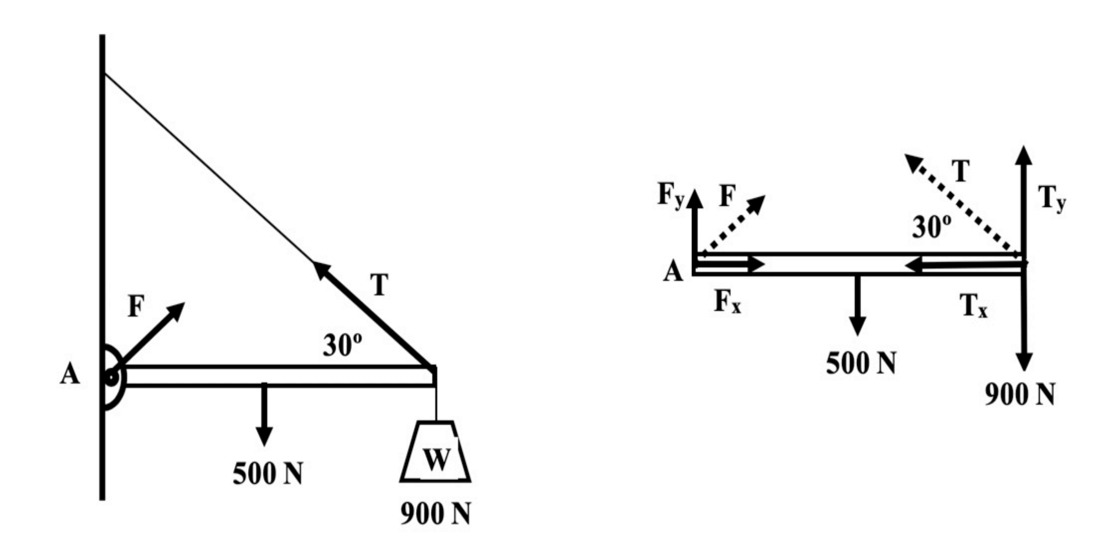
8. Un cuadro de 20 N. se cuelga de un clavo, como indica la figura, de manera que las cuerdas que lo sostienen forman un ángulo de 60º. ¿Cuál es la tensión en cada segmento de la cuerda?



Por ejemplo

Si una viga uniforme de 500 N de peso y 3 m de longitud está sostenida por un cable, como se observa en la figura. La misma se apoya en la pared y el cable forma un ángulo de 30º con respecto a la viga, que está en posición horizontal. Y una carga de 900 N se cuelga del extremo derecho. ¿Cuál es la tensión T del cable? ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por el pivote?

Suponemos que todo el peso de la viga actúa en su punto medio. Trazamos un diagrama de cuerpo libre y aplicamos las dos condiciones de equilibrio para obtener las fuerzas desconocidas.



Primero calculamos la tensión del cable al sumar los momentos de torsión respecto al extremo izquierdo e igualar el resultado a cero.

$$F(0) - (500N)(1{,}5m) - (900N)(3m) + T_x(0) + T_y(3m) = 0$$

$$0 - 750N.m - 2700N.m + 0 + T_y(3m) = 0$$

Al simplificar, obtenemos una expresión para T_y:

$3T_y = 3450\text{N}$ $\qquad T_y = 0{,}5T$ por ser $T_y = T\cos 60°$ ó $T_y = T sen\, 30°$

Y como $T_y = 1150N$, escribimos

$(0{,}5)T = 1150N$ o

$$T = \frac{3450N.m}{0{,}5(3m)} = 2300N$$

Aplicamos la primera condición de equilibrio, usando las componentes horizontal y vertical de *F* y *T* junto con las fuerzas dadas. La componente F_x de la fuerza ejercida por la pared en la viga se obtiene al sumar las fuerzas a lo largo del eje x.

$\sum F_y = 0$ ó $F_y + T_y - 500N - 900N = 0$

Despejando F_y,

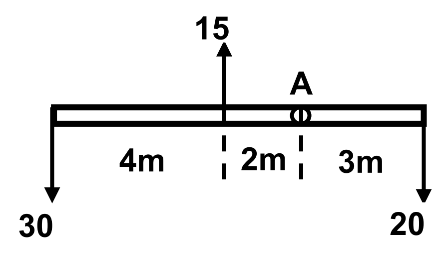
$F_y = 1400N - T_y$

Como T_y ya es conocido, puede sustituirse para hallar F_y

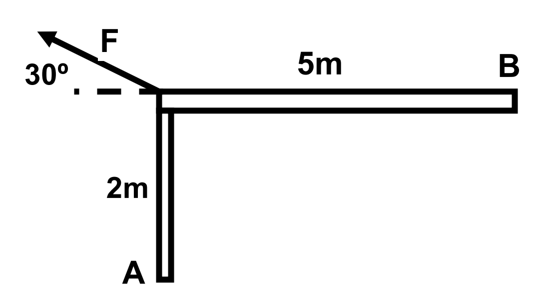
$F_y = 1400N - 1150N = 250N$

Actividades

1. ¿Cuál es el momento de torsión resultante respecto al punto A de la figura? No tome en cuenta el peso de la barra.



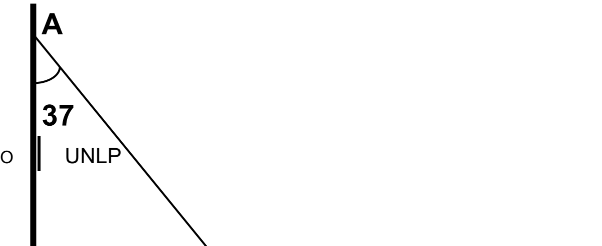
2. ¿Qué fuerza horizontal se debe aplicar en el punto A de la figura para que el momento de torsión resultante respecto al punto B sea igual a cero cuando la fuerza F = 80 N?



3. Un poste de 4m es sostenido en sus extremos por dos cazadores que transportan en él un venado de 800 N que cuelga en un punto localizado a 1,5 m del extremo izquierdo. ¿Qué fuerza ascendente necesita ejercer cada cazador?

4. Un puente cuyo peso total es de 4500 Kg tiene 20 metros de longitud y tiene soportes en ambos extremos. Halle las fuerzas que se ejercen en cada extremos cuando se coloca un tractor de 1600 Kg a 8m del extremo izquierdo.

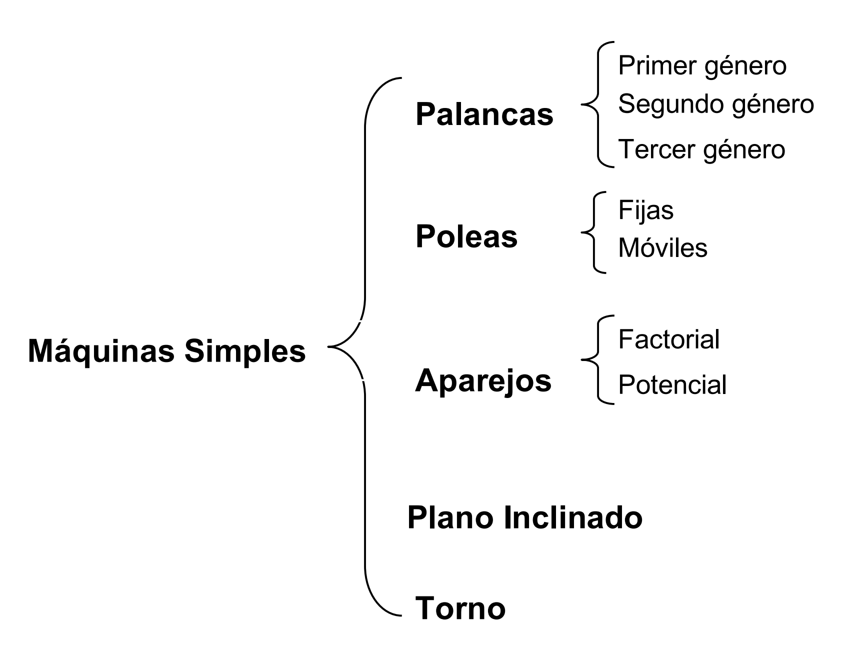
5. Una viga horizontal de 6m, cuyo peso es 400N, gira sobre un pivote fijo en la pared como se observa en la figura. La viga está sostenida por un cable en un punto localizado a 4,5 m de la pared y sostiene un peso de 1200 N en el extremo derecho. ¿Cuál es la tensión en el cable?



Máquinas simples

La noción de momento de una fuerza respecto a un punto ha sido aprovechada por el hombre para implementar dispositivos que facilitan su trabajo. Desde los comienzos de la historia, el hombre se las arregló para construir edificios y monumentos enormes y majestuosos que todavía hoy nos asombran, utilizando diversos mecanismos que permiten vencer pesos y resistencias mayores que las fuerzas que se ejercen para hacerlos funcionar.

Esta multiplicación de la fuerza no tiene nada de mágico, simplemente son máquinas simples, que describiremos a continuación



Palancas

Es un cuerpo rígido que puede girar alrededor de un eje o de un punto de su longitud, llamado *apoyo*. Ejemplos: (barra rígida, una barreta, un remo, etc).

Cuando utilizamos palancas, es necesario considerar su posibilidad de rotación, para ello analizamos los momentos de las fuerzas ejercidas respecto al punto de apoyo. Cuando la suma de todos los momentos es cero, la palanca está en equilibrio.

De acuerdo a la posición del punto de apoyo, de la resistencia y de la fuerza podemos clasificar las palancas en distintos géneros.

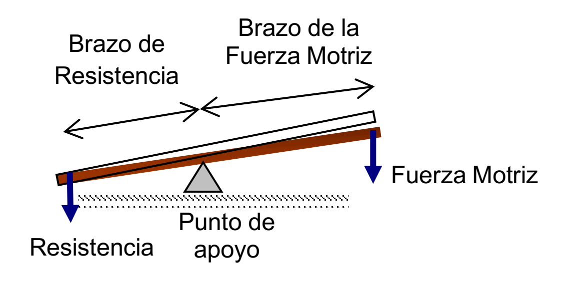
- ✓ <u>Primer género</u>: el punto de apoyo se encuentra entre la fuerza motriz y la resistencia.
- ✓ <u>Segundo género</u>: la resistencia se encuentra entre el punto de apoyo y la fuerza
- ✓ <u>Tercer género</u>: la fuerza motriz se encuentra entre el punto de apoyo y la resistencia.

En forma esquemática podemos diferenciar los distintos géneros. La condición para que exista equilibrio es que la suma de los momentos de las fuerzas respecto de un punto sea nula, puede expresarse de la siguiente manera

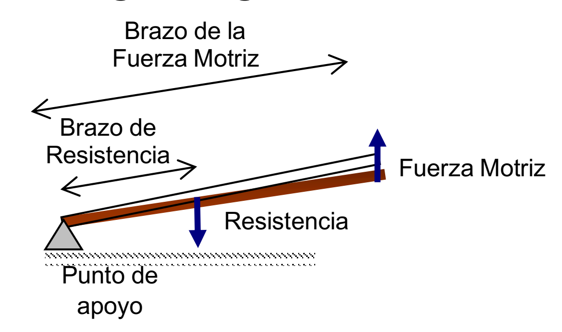
$$M_o\left(\vec{F}\right)+M_o\left(\vec{R}\right)=0$$

$$F \bullet b_f - R \bullet b_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F \bullet b_f = R \bullet b_r} \quad \Rightarrow \quad \text{las palancas}$$

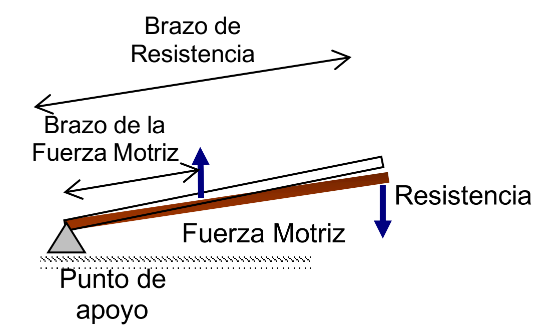
Primer género



Segundo género

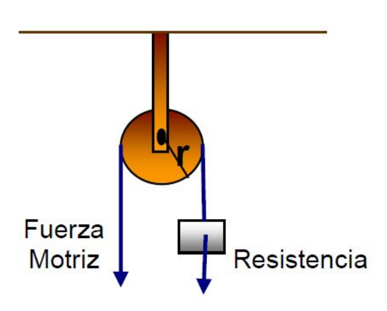


Tercer género



Poleas

La polea es una rueda acanalada que puede girar alrededor de un eje que pasa por su centro. Si ese eje está fijo, la polea se llama **polea fija**, este es el caso de la roldana. Su acanaladura suele llamarse garganta**.**



Una polea fija se puede considerar esquemáticamente como una palanca de brazos iguales, por lo tanto, de su condición de equilibrio será:

$$M_o\left(\vec{F}\right)+M_o\left(\vec{R}\right)=0$$

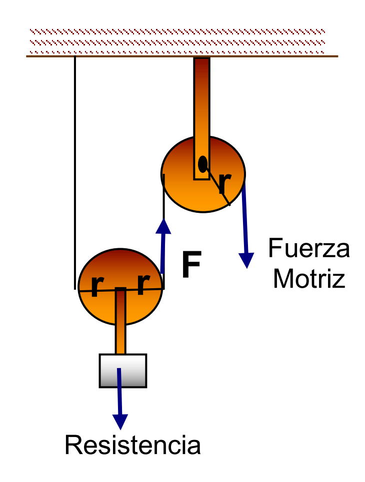
$$F\bullet r - R\bullet r = 0 \quad \Rightarrow \quad F = R$$

Si utilizamos una polea fija, ejercemos una fuerza igual al módulo de la resistencia.

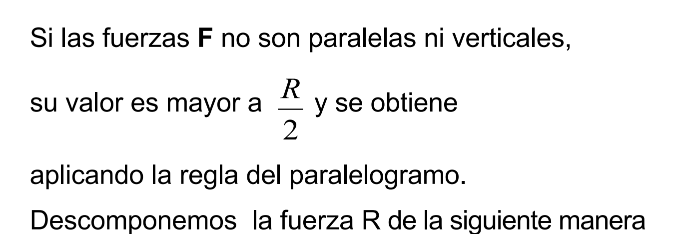
Otra manera de utilizar una polea es colgándola de las cuerdas y sujetando el cuerpo del eje, este dispositivo recibe el nombre de **polea móvil**

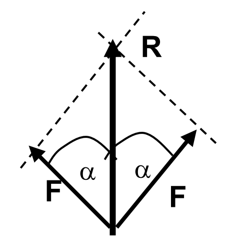
$$M_o\left(\vec{F}\right)+M_o\left(\vec{R}\right)=0$$

$$F\bullet 2r - R\bullet r = 0 \quad \Rightarrow \quad F = \frac{R}{2}$$

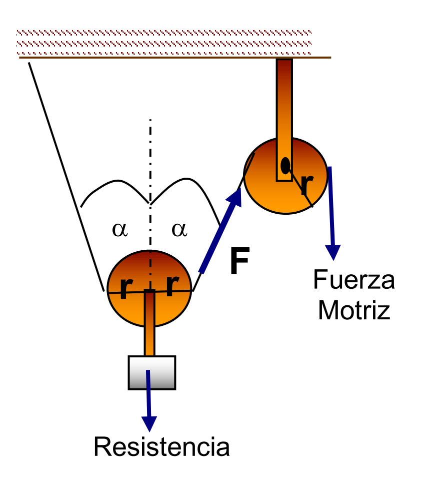


Según esta última condición la fuerza motriz ejercida tiene un módulo igual a la mitad del módulo de la resistencia


Si las fuerzas **F** no son paralelas ni verticales, su valor es mayor a $\frac{R}{2}$ y se obtiene aplicando la regla del paralelogramo.
Descomponemos la fuerza R de la siguiente manera



$$F=\frac{R}{2\cos\alpha}$$

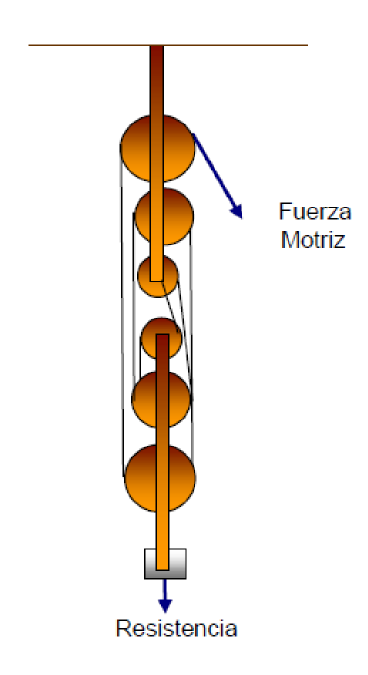


Aparejos

Los aparejos son dispositivos formados por varias poleas conectadas entre si. De acuerdo al tipo y cantidad de poleas que se utilicen los podemos clasificar en:

Aparejos
- Factorial
- Potencial

Aparejo Factorial

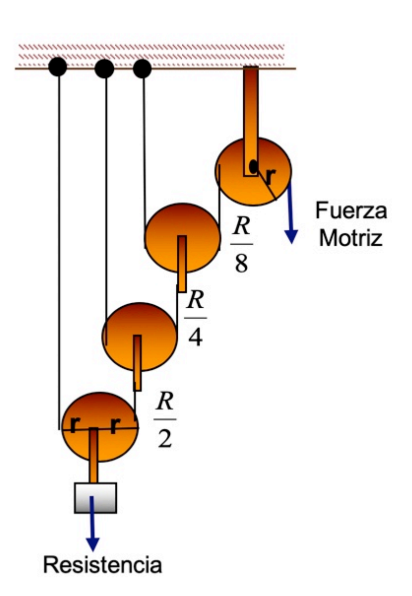


Está formado por la misma cantidad de poleas fijas y móviles ligadas entre sí. En este caso, el número de cuerdas que soportan la carga es igual al doble del número de poleas móviles. Por lo tanto, la fuerza ejercida para poner en equilibrio un cuerpo de peso R es:

$$F = \frac{R}{2 \bullet n}$$

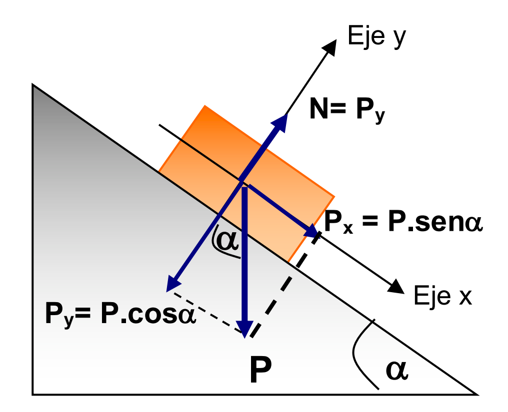
Aparejo Potencial

Son **n** poleas móviles. La cuerda que pasa por cada una de ellas tiene un extremo fijo a un soporte común y el otro a la polea siguiente. Considerando despreciable el peso de las poleas, la primera reduce a la mitad la intensidad de R; la segunda reduce a un cuarto el valor de R, la tercera a un octavo, y así sucesivamente: de modo que si son n las poleas móviles se verifica



$$F = \frac{R}{2^n}$$

Plano inclinado



A lo largo de la historia el hombre ha ido estudiando la mejor manera de aprovechar la fuerza ejercida. Uno de los dispositivos más antiguos del mundo que le permitieron optimizar sus esfuerzos fue el plano inclinado.

Si colocamos un cuerpo de peso **P** sobre [illegible] fuerza que actúa, se descompone en dos direcciones: una paralela al plano $\mathbf{P_x}$ que es la fuerza que ocasiona que el cuerpo se deslice por el plano y otra perpendicular a él, llamada $\mathbf{P_y}$.

$\mathbf{P_y}$ empuja al cuerpo sobre el plano, pero este no cede y reacciona aplicando sobre el cuerpo una fuerza N, opuesta a P_y. Esto se debe al Principio de Acción y Reacción. Por lo tanto, queda solo la componente horizontal, que hará deslizar el cuerpo, para evitar este movimiento bastará aplicar una fuerza **F** igual y de sentido contrario.

Observando el paralelogramo de fuerzas contruido para descomponer a P en sus dos direcciones, vemos que obtenemos un triángulo rectángulo, y que los vectores Py y P forman el ángulo α de inclinación del plano. Por lo tanto, la componentes valdrán:

$\mathbf{P_x = P.sen\alpha}$ **y** $\mathbf{P_y = P.cos\alpha}$

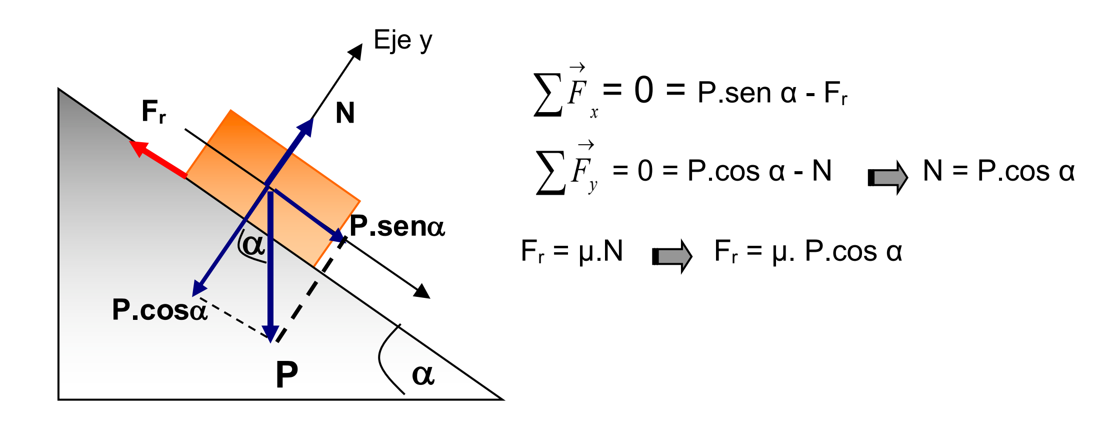
Por ejemplo: Si tenemos un cuerpo que pesa 50 $\overrightarrow{Kg}$.y lo colocamos sobre un plano inclinado de 30º.

Realizando un cálculo rápido y sencillo,

$$P_x = P.sen\alpha \Rightarrow P_x = 50\ \overrightarrow{Kg}.sen30º \Rightarrow P_x = 25\ \overrightarrow{Kg}.$$

Si una persona que está en lo alto del plano inclinado tiene atado el cuerpo con una soga y quiere que no se deslice cayendo, deberá ejercer una fuerza de 25 $\overrightarrow{Kg}$., si consideramos que el plano no tiene rozamiento.

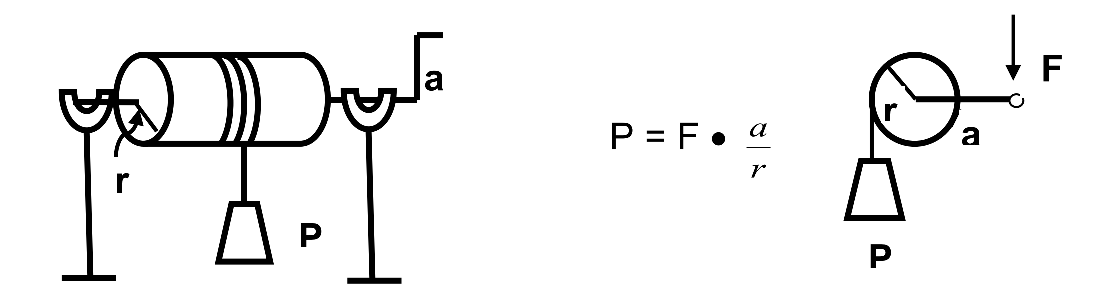
Si el plano tiene rozamiento, debemos realizar la sumatoria de las fuerzas en ambos ejes, considerando que el cuerpo no se mueve (está en equilibrio), por lo tanto la suma de las fuerzas es cero.



Torno

El torno es un cilindro que gira alrededor de su eje, bajo la acción de una fuerza **F** aplicada a una manivela situada en su extremo y con una soga arrollada de la que pende un peso P, Sirve para elevar pesos con fuerzas menores

Estando el torno formado por piezas rígidas puede establecerse que en el caso de equilibrio de momentos de las fuerzas **F** y **P** con respecto al eje O son iguales y de signos contrarios. La condición de equilibrio queda establecida por:



Actividades

1. El sistema que eleva el ascensor de una casa de departamentos está formado por una polea fija y una móvil. El peso máximo del ascensor cargado es de 750 $\overrightarrow{Kg}$. ¿Cuál es la fuerza que habrá que hacer para levantarlo?

2. En una obra se utiliza una polea fija conectada a una polea móvil para elevar un balde con material de construcción. El obrero que se encuentra abajo ejerce una fuerza de 17 $\overrightarrow{Kg}$.¿Cuánto pesa el balde lleno de material que está siendo mantenido en equilibrio?

3. Mediante un aparejo factorial de 5 poleas móviles se equilibra un cuerpo que pesa 1200 $\overrightarrow{Kg}$.¿Cuál es la fuerza aplicada? ¿Y si se tratara de un aparejo potencial con el mismo número de poleas móviles?
4. Un plano inclinado forma con la horizontal un ángulo de 30°. ¿Qué fuerza horizontal será necesaria para mantener en equilibrio sobre el plano a un cuerpo que pesa 250 $\overrightarrow{Kg}$.?
5. Una grúa cuenta en el extremo de su eje con un aparejo de cuatro poleas móviles. ¿Cuál es el peso que puede levantar si la tensión máxima que soporta el cable es de 2000 $\overrightarrow{Kg}$. Considere si el aparejo es factorial y potencial.

Bibliografía

LOPEZ CARLOS – GONZALVO CARLOS. (2008) Apunte de Cátedra. Taller Vertical II de matemática.

TIPPENS, P. E. (2009). FISICA: CONCEPTOS Y APLICACIONES: INCLUYE MANUAL DE LABORATORIO (1a. ed., 3a. reimp.). BOGOTA: MCGRAW-HILL INTERAMERICANA.

Apuntes de Clase, Física Parte I y II, Cátedra de Matemática 4, Arrarás-Marañón, Facultad de Arquitectura y Urbanismo, 2016.

CAPÍTULO 5
Conceptos de Física Parte II

Julio Marañón Di Leo

La energía

La energía es uno de los conceptos físicos más importantes y el término “energía” es uno de los más utilizados en nuestro lenguaje cotidiano. Sin embargo, el concepto era desconocido para Isaac Newton, y su existencia aún era tema de debate alrededor de 1850; en cambio hoy lo encontramos tanto en todas las ciencias como en casi todos los aspectos de la sociedad. Así, a pesar de que resulta difícil definirla, estamos acostumbrados a usar la palabra, por ejemplo: el Sol nos da energía en forma de luz, una persona es capaz de levantar un cuerpo debido a la energía que le proporcionan los alimentos que ingiere, los seres vivos necesitan energía para poder moverse, las rocas ruedan cuesta abajo porque tienen energía gravitacional, etc.; pero sólo es posible observar la energía cuando se *transfiere* de un lugar a otro o cuando se *transforma* de una forma a otra.

De esta manera, se mide la energía por sus efectos sobre la materia, y esto significa cambios tangibles en la condición o estado de un cuerpo material —temperatura, posición, velocidad, masa, etc. —.

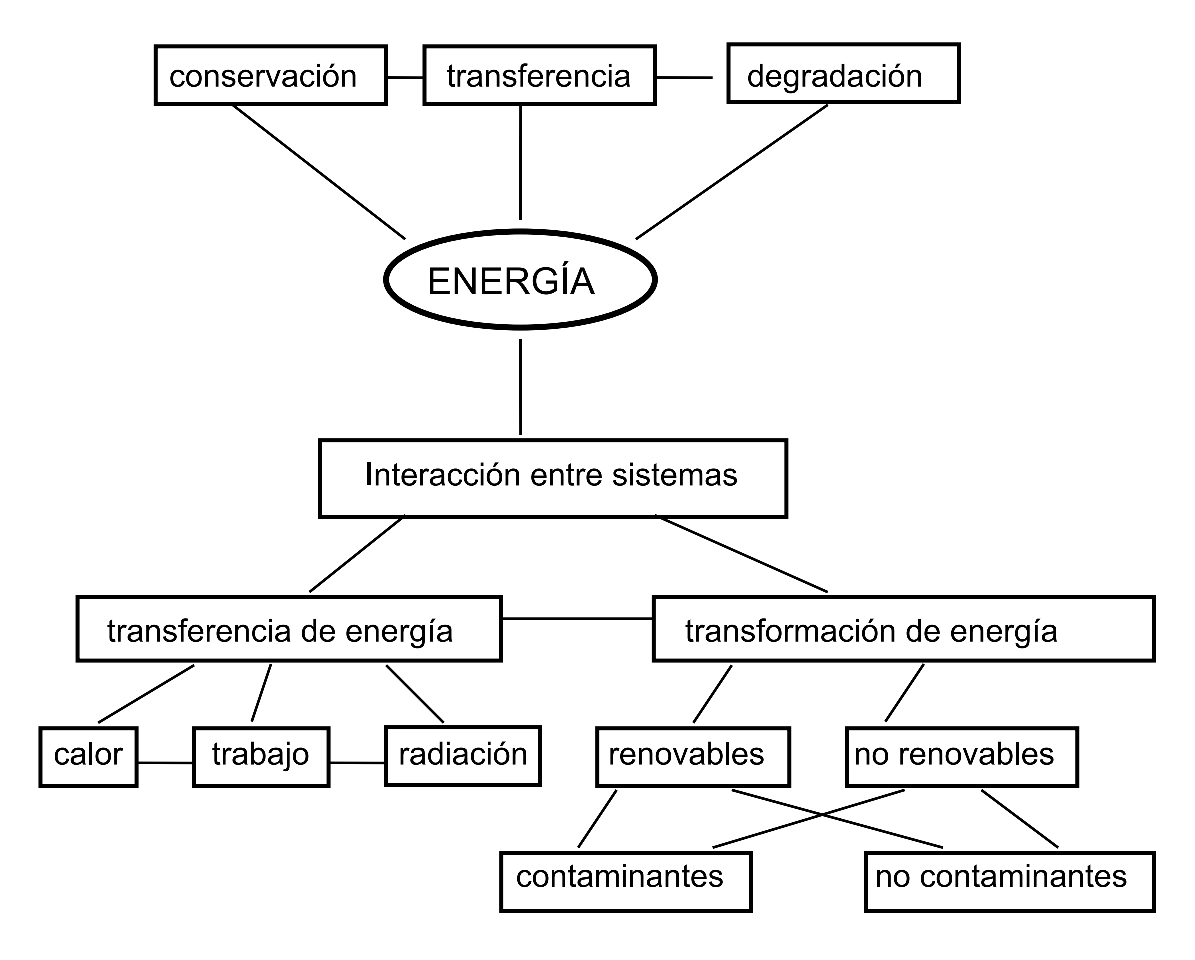
A principios del siglo XIX aparece la noción nacida de la Revolución Industrial, siendo sus dos principales manifestaciones la **energía cinética**, originada por una masa en movimiento, y la **energía potencial**, que es la energía que se almacena al moverse en contra de una fuerza.

En relación con lo anterior, la energía, sin la cual no puede haber cambios está conectada de alguna forma a la fuerza, por ello, en física se dice que *“*la energía representa la capacidad de realizar trabajo*”,* así es posible afirmar que un cuerpo posee energía cuando es capaz de realizar **trabajo**. Por ejemplo, una persona es capaz de realizar el trabajo de levantar un cuerpo debido a la *energía* que le proporcionan los alimentos que ingiere; el vapor de agua de una caldera posee *energía*, ya que es capaz de efectuar el trabajo de mover las turbinas de una planta de generación eléctrica. Por lo tanto, la energía se puede *presentar* en diversas formas, química, mecánica, térmica, eléctrica, atómica, etc. De los ejemplos anteriores, los alimentos liberan energía química en el organismo humano; el vapor de la caldera posee energía térmica y al mover las turbinas se genera energía mecánica.

A modo de síntesis se presenta una definición descriptiva que favorece la comprensión de las características que hacen de la energía una de las propiedades más importantes de la materia:

La energía es la propiedad de todo cuerpo o sistema material, en virtud de la cual éste puede transformarse, modificando su estado o situación, así como interactuar con otros originando en ellos procesos de transformación.

Para dar una idea integrada que destaque la importancia de la energía en la realización de procesos se plantea un esquema que contiene los aspectos más relevantes a tener en cuenta para su estudio y a continuación se desarrollan algunos de ellos:



- *Todos los cuerpos tienen energía*

Es posible interpretar que todos los cuerpos tienen energía a partir de considerar la estructura interna de la materia, que está constituida por moléculas en permanente movimiento (vibración) e interactúan entre ellas a través de fuerzas de atracción y repulsión; dichas fuerzas son las que dan consistencia a los sólidos y fluidez a los líquidos y gases.

La interacción entre moléculas evidencia la **energía potencial** en ellas (la energía potencial, también llamada de posición, depende del peso del cuerpo y de su posición respecto de un sistema de referencia).

El movimiento de las moléculas manifiesta la **energía cinética** de las mismas (la energía cinética, también llamada de movimiento, depende de la masa del cuerpo y de su velocidad).

La suma de la energía cinética y potencial de todas las moléculas constituye la **energía interna** del sistema.

Un ejemplo cotidiano

◊ Después de lo visto es correcto decir "los cereales tienen energía" ya que ésta se obtiene por la ruptura de los enlaces químicos. Lo que mantiene unidos a los átomos de carbono e hidrógeno en los cereales se debe a que dichos átomos no poseen la suficiente energía interna como para escapar de su atracción mutua; sin embargo, los enlaces se rompen a causa del proceso de respiración del organismo, formándose dióxido de carbono y agua por combinación con el oxígeno. Estas moléculas tienen menor energía que los enlaces de carbono e hidrógeno de los cereales, así que el sobrante se libera en el organismo en forma de **calor**, movimiento muscular, etc.

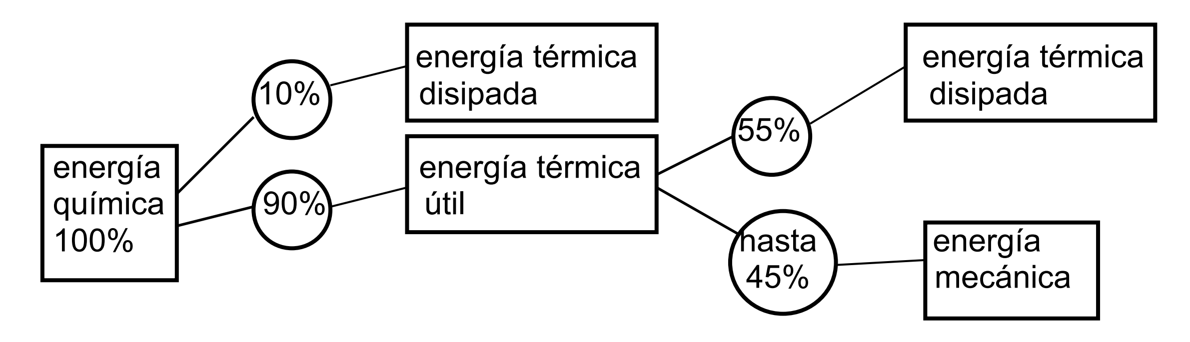
- *La energía se transforma.*

Más importante que poder decir qué es la energía es entender cómo se comporta, es decir, como se transforma. Así resulta sencillo comprender los procesos o cambios que ocurren en la naturaleza - la caída de una hoja, el proceso de nutrición, etc. - analizando la transformación de la energía de una forma en otra. Cabe señalar además que, la mayoría de las transformaciones energéticas útiles para el ser humano están asociadas a dispositivos y procesos tecnológicos: engranajes, turbinas, calderas, etc.

Ejemplos convencionales

◊ El proceso de combustión - oxidación rápida y alta temperatura - que se produce en, por ejemplo, hornos y calderas, permite ejemplificar la transformación de **energía química en energía térmica**. Pero no toda es aprovechable.

El rendimiento de la operación de aprovechamiento de la energía térmica en una caldera puede ser de hasta el 90%. Esto significa que hasta el 90% de la energía térmica contribuye a la producción de vapor y el 10% restante se utiliza en calentar los conductos y la misma caldera, o se disipa al medio ambiente.

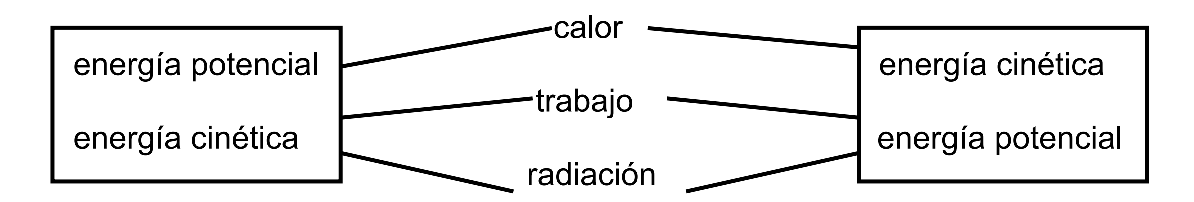


◊ Los convertidores fotoeléctricos que permiten la transformación de **energía luminosa en energía eléctrica** reciben el nombre de células o celdas solares. Su superficie es de silicio o germanio y son capaces de generar una corriente eléctrica cuando se los expone a la radiación. Así pueden funcionar relojes, calculadoras, alarmas, etc.
En ellos el rendimiento es de aproximadamente el 10%, valor que varía según el material que se utilice para su fabricación. A pesar de ser tan poco el rendimiento se cuenta con la energía que proviene del Sol, que es gratis.

- *La energía se transfiere.*

En esencia hay dos tipos de energía, la energía potencial, que se almacena como lo haría un resorte y la energía cinética, propia de los cuerpos en movimiento. Por lo tanto, en cualquier suceso la energía se transfiere en estos estados, así, por ejemplo, el niño que da cuerda a su juguete está transfiriendo energía al resorte, la cual se almacena como energía potencial.

Los mecanismos de transferencia energética de acuerdo con el suceso se llaman: **calor**, **trabajo** o **radiación**.



Ejemplos cotidianos

◊ El reconocer que "el calor es energía que se transfiere entre dos sistemas que se encuentran a distinta temperatura", permite explicar por qué los ríos no se hielan hasta el fondo. Las capas superiores del agua se van enfriando, aumentan su densidad, bajan y son reemplazadas por las inferiores a mayor temperatura. Esto continúa hasta que, en el intervalo de 4ºC a 0ºC, la menor densidad del agua interrumpe esta transmisión, mientras las capas superiores siguen enfriándose y se congelan en la superficie.

◊ Considerando que "la energía puede transmitirse por medio del trabajo y aceptando que no es correcto decir que se transforma en trabajo o que el trabajo se transforma en energía", se comprende que se está realizando trabajo cuando se levanta un cuerpo de cierto peso contra la fuerza gravitatoria; además, cuanto más pesado sea el cuerpo, o cuanto más alto se levante, mayor será el trabajo realizado.

◊ Un hecho interesante resulta como "la energía solar que se transfiere en forma de radiación se relaciona con las estaciones". No todas las radiaciones que llegan al planeta, provenientes del Sol, son absorbidas por la superficie terrestre. Un porcentaje es absorbido

por la atmósfera en los días claros, otros por las nubes y la niebla. Los casquetes polares absorben aproximadamente de un 30% a un 40% reflejando al espacio una cantidad similar. Así al estar el eje terrestre inclinado respecto de los rayos del Sol, éstos en el hemisferio Norte (verano), durante seis meses, se distribuyen sobre una superficie mucho mayor que sobre el hemisferio Sur (invierno). Seis meses después sucede a la inversa.

- *La energía se conserva.*

La energía se conserva en todos los procesos. Existe la misma cantidad de energía antes y después de un suceso. Algunos hechos no pueden ocurrir si la energía total posterior a su ocurrencia no se mantiene constante, por ejemplo, un carro de montaña rusa no puede subir a un punto más alto del que empezó. Por lo tanto, la energía define los límites de las posibilidades y por ello es más apropiado decir que la energía es necesaria para levantar un cuerpo o ponerlo en movimiento que decir "la energía es el motor o la fuerza que tienen las cosas".

En relación con lo anterior, si en un proceso cierta cantidad de una forma de energía desaparece, se produce el surgimiento de otra forma de energía en cantidad equivalente a la desaparecida; es decir, nunca se observa la destrucción de energía, sino únicamente la transformación de cierto tipo de energía en otra.

El estudio de diversas manifestaciones y transferencias energéticas condujo a una de las mayores generalizaciones de la física, el **Principio de conservación de la energía**: "la energía se puede transformar de una forma a otra, pero no puede ser creada ni destruida, por lo cual la energía total es constante".

Ejemplos cotidianos

◊ Un niño se divierte en una hamaca colgada de un árbol. La energía se transforma de potencial a cinética y de cinética en potencial.

◊ Las intensas fuerzas gravitacionales que prevalecen en el interior del Sol provocan un proceso conocido como fusión termonuclear, por el cual se desprende energía radiante y parte de ella llega a la Tierra. Una porción de esta energía es absorbida por las plantas y luego la energía de las plantas se almacena en el carbón. Otra porción de la energía solar mantiene la cadena alimentaria de los océanos que comienza con las plantas, y una fracción de esta energía se convierte después en petróleo. Otra porción de la energía del Sol evapora el agua de los océanos y parte de esta energía vuelve a la Tierra en forma de lluvia, que puede quedar almacenada en una presa.

- *La energía se degrada.*

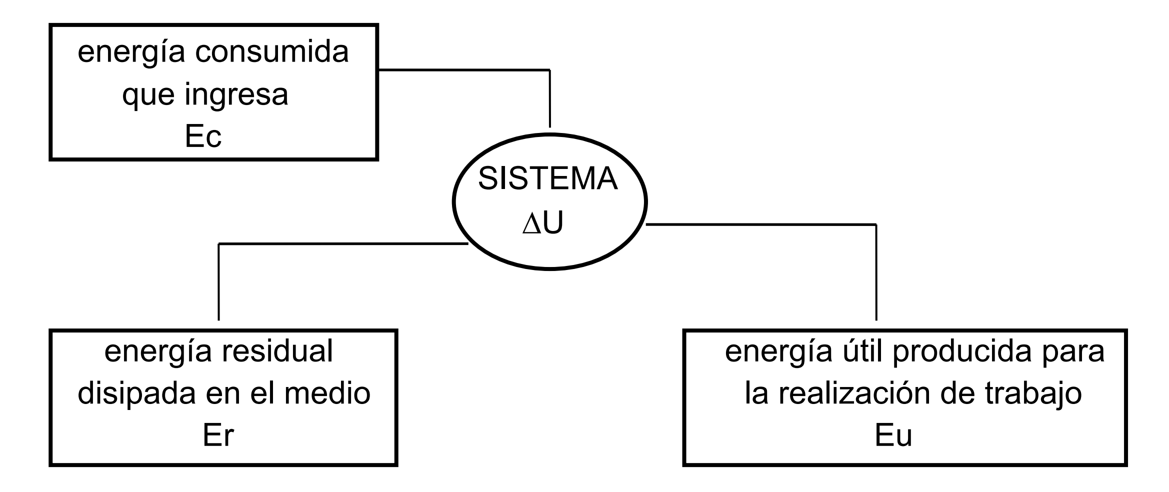
Los medios de comunicación masiva transmiten mensajes tales como “es necesario controlar el consumo energético”, “producción energética”, “la energía se agota”, “aumento del gasto energético”, etc. Esta aparente contradicción entre el lenguaje cotidiano y el científico, respecto del principio de conservación de la energía, crea la necesidad de introducir la noción de **degradación de la energía**. Así al decir consumo energético se hace referencia a la transformación de un tipo de energía a otra de menor calidad, lo contrario sería hablar de producción energética.

Que la energía se difunde o se degrada representa la base del **Segundo Principio de la Termodinámica**, la cual introduce la noción de **Entropía**, que es la medida de como la energía se difunde. Este principio considera el hecho de que en todos los procesos conocidos nunca disminuye la entropía total y generalmente aumenta, es así que el universo se va desordenando. Por ejemplo, los combustibles almacenan energía que la transfieren espontáneamente cuando se inflaman; hay exactamente la misma cantidad de energía antes y después de la quema, pero ya no está localizada. Se extiende en todas direcciones y es menos útil porque es muy difícil reunirla.

Ejemplo cotidiano

◊ El motor de un auto transforma la energía química almacenada en el combustible en energía mecánica. Una parte de la energía obtenida se usa para impulsar el motor (aproximadamente el 35%) y otra se disipa en forma de calor. Parte de la energía disipada va al sistema de refrigeración y pasa del radiador al aire, otra parte sale por el escape y casi la mitad se usa para vencer la fricción de las partes móviles del motor. Luego, la energía no se destruye. Simplemente se degrada.

Los procesos analizados hasta el momento han permitido reconocer sucesivas transformaciones energéticas y los sistemas que actúan como transformadores. A continuación, se presenta un esquema para mostrar el balance energético, las cantidades de energía que recibe y cede un sistema cualquiera:



Por ejemplo, si el esquema corresponde al funcionamiento de una central termoeléctrica, Ec representa la energía aportada en forma de combustible, Eu la energía eléctrica producida, Er la energía perdida a través de los humos de las turbinas, etc. y ΔU la variación de la energía interna del mismo sistema que puede variar durante el proceso. La energía residual puede ser, no solo no aprovechable sino incluso perjudicial (por ejemplo, la polución térmica de ríos y lagos) y costosa su disipación.

Hoy más del 90% del consumo energético mundial proviene de los combustibles fósiles, sin tomar conciencia que es un recurso a punto de agotarse, ni considerar que dicho consumo contamina altamente el aire que respiramos y el agua que bebemos.

Si bien la mayor parte de la energía que hoy consumimos se obtienen de fuentes no renovables como el petróleo, gas, uranio y en menor escala el carbón; hay otras fuentes de energía como el Sol, el viento, el agua, etc., que son renovables.

Estas fuentes presentan, en general, algunas características entre sí:

◊ son inagotables, ya que se restablecen rápidamente.
◊ no son contaminantes.
◊ el hombre no las puede regular.
◊ por lo general, no son almacenables ni transportables.

Su aprovechamiento se realiza en forma local, por lo general, se hallan en forma dispersa. Por ejemplo, para usar productivamente la energía solar, se necesita una gran superficie de utilización para satisfacer las necesidades de una población.

Por lo tanto, si la intención del ser humano es favorecer el desarrollo de la industria y la tecnología en pos de construir un medio ambiente que contemple una mejor calidad de vida, habrá que utilizar energías alternativas que sean renovables y no contaminantes.

Ejemplos para reflexionar

◊ *Energía solar*

Si bien, la mayoría de las fuentes de energía están vinculadas al Sol (eólica, mareomotriz, entre otras), recibe este nombre la que llega al planeta en forma de radiación electromagnética. Esta radiación es la que regula la temperatura de la Tierra y posibilita la existencia de los seres vivos.

Aunque no es una fuente de intensidad constante, en la actualidad se utiliza en colectores solares, donde su diseño depende de su función, por ejemplo, generar electricidad, sistemas de calefacción, sistemas de refrigeración, etc.

◊ *Energía mareomotriz*

Se obtiene de las mareas, las olas y las diferencias térmicas entre las profundidades. Las de las mareas utiliza el desnivel que alcanza el agua entre pleamar y bajamar. Las diferencias térmicas son principalmente aprovechadas en las zonas de climas cálidos, donde dicha diferencia entre la superficie y las profundidades es más importante (mareas tropicales).

◊ *Energía de la biomasa*
Es la transformación química de productos orgánicos (vegetales, desechos urbanos) en combustibles, por ejemplo, las plantas biogasificadoras. Existe biomasa contaminante (residuos ganaderos e industriales, desperdicios humanos) y no contaminante (aceites vegetales, residuos forestales y agrícolas).

Transferencia de energía

Definiciones de calor

La idea del calor como una sustancia se debe descartar. No se trata de algo que el objeto *posea,* sino de algo que él mismo *cede* o *absorbe*. El calor es simplemente otra forma de energía que puede medirse únicamente en términos del efecto que produce. La unidad de energía del Sistema Internacional (SI), el *joule*, es también la unidad preferida para medir el calor, puesto que éste es una forma de energía. Sin embargo, hay tres antiguas unidades que aún se conservan, y de ellas se hablará también en este texto. Estas primeras unidades se basaron en la energía térmica requerida para producir un cambio patrón. Son la caloría, la kilocaloría y la unidad térmica británica o Btu.

Una caloría (cal) es la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de un gramo de agua en un grado Celsius.

Una kilocaloría (kcal) es la cantidad de calor necesario para elevar la temperatura de un kilogramo de agua en un grado Celsius (1 kcal = 1000 cal).

Una unidad térmica británica (Btu) es la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de una libra patrón (lb) de agua en un grado Fahrenheit.

Además del hecho de que estas viejas unidades implican que la energía térmica no se puede relacionar con otras formas de energía, existen otros problemas con su uso. El calor requerido para cambiar la temperatura del agua de 92 a 93º C no es exactamente el mismo que el que se necesita para elevar la temperatura de ese líquido de 8 a 9º C. Por tanto, es necesario especificar el intervalo de temperatura para las calorías y para la unidad térmica británica en aplicaciones de precisión. Los intervalos elegidos fueron 14,5 a 15,5º C y 63 a 64º

F. Además, la unidad libra que aparece en la definición del Btu debe ser reconocida como la ***masa de la libra patrón***. Esto representa el abandono de las unidades del SUEU (Sistema Usual en Estados Unidos), ya que en ese sistema la libra quedó reservada para expresar el peso. Por tanto, cuando se menciona 1 lb de agua, nos estaremos refiriendo a la cantidad de agua equivalente a 0,456 kg de masa. Esta distinción es necesaria debido a que la libra de agua debe representar una cantidad constante de materia, independientemente del lugar geográfico. Por definición, la libra masa se relaciona con el gramo y el kilogramo en la siguiente forma:

1lb = 454 g. = 0,454 kg.

La diferencia entre estas antiguas unidades para el calor resulta de la diferencia que existe entre las masas y de la diferencia entre las escalas de temperatura.

1 Btu = 252 cal = 0,252 kcal

La primera relación cuantitativa entre estas unidades antiguas y las unidades tradicionales para la energía mecánica fue establecida por Joule en 1843. En la actualidad, el ***equivalente mecánico del calor*** ya se ha establecido con un alto grado de precisión mediante varias técnicas. Los resultados aceptados son

1 cal = 4,186 J
1 Btu = 252 cal = 1054,9 J

Por tanto, son necesario 4,186 J de calor para elevar la temperatura de un gramo de agua de 14,5 a 15,5º C. Por el hecho de que cada una de las unidades anteriores se sigue usando, con frecuencia es necesario comparar unidades o hacer conversiones de una unidad a otra.

Ahora que se han definido las unidades para la medición cuantitativa del calor, la diferencia entre cantidad de calor y temperatura debe ser muy clara. Por ejemplo, supongamos vaciar 200 g. de agua en un vaso de precipitado y 800 g. de agua en otro vaso. La temperatura inicial del agua en cada vaso es de 20ºC. Se coloca una flama bajo cada vaso durante el mismo período, suministrando 8000 J. de energía calorífica al agua de cada vaso. La temperatura de los 800 g. de agua se incrementa un poco más de 2ºC, pero la temperatura de los 200g. aumenta casi 10ºC. Sin embargo, se suministró la misma cantidad de calor en cada vaso.

Cuestiones energéticas

- Todos los cuerpos están formados por un número determinado de átomos y moléculas que conforman su estructura microscópica. Dichos átomos están en estado continuo de

agitación y movimiento y por ello poseen cierta energía asociada al movimiento: energía cinética. Esta energía cinética atómica es la responsable de la **temperatura** del cuerpo. Por lo tanto:

La temperatura de un cuerpo mide el estado de agitación,
(de movimiento), de los átomos que componen el cuerpo.

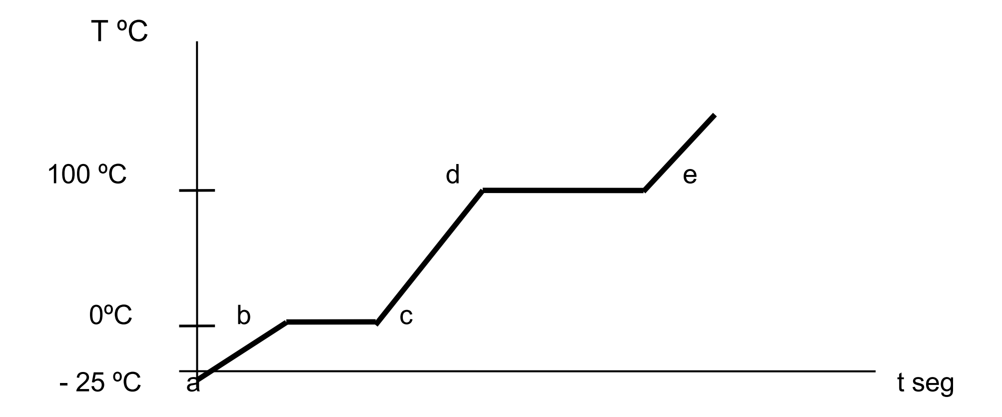
- En apartados anteriores se trató la energía mecánica, la energía de un objeto que se comporta como un todo, como la suma entre la energía cinética y la energía potencial. Enfoques contemporáneos denominan a la energía interna de un objeto, (que se asocia con el movimiento aleatorio de sus átomos y moléculas), **energía térmica**.
- La energía térmica en tránsito se define como **calor**, que es la energía del movimiento aleatorio transferida entre dos cuerpos que se encuentran a distinta temperatura.
- El **calor** es la energía térmica ganada, perdida o transferida por medio del efecto acumulativo de colisiones atómicas individuales. Un cuerpo contiene, almacena energía térmica, no calor; este último es energía térmica que se transfiere al, dentro de, o fuera del cuerpo; una vez transmitida la energía ya no se llama calor.

Cambios de estado

(Cambio de fase. Calor de fusión. Calor de ebullición)

El término fase o estado, como lo utilizamos conceptualmente en este tema, se refiere al hecho de que la materia existe como sólido, líquido o gas. Por ejemplo, el agua la podemos encontrar en fase sólida (hielo), líquida o gaseosa (vapor de agua). Todas las sustancias pueden existir en cualquiera de las tres fases, siempre que no se descompongan a elevadas temperaturas. Los cambios de fase van acompañados de absorción o desprendimiento de calor.

Supongamos que tomamos un trozo de hielo a -25°C y se lo tritura, lo colocamos en un recipiente e introducimos un termómetro, rodeamos el recipiente con una bobina que le proporciona calor constante, el hielo no recibe calor por otro medio.



Se observa que la temperatura aumenta hasta **b** a 0°C, en ese momento aparece agua lí-

quida, el hielo se comienza a fundir. La fusión es un cambio de fase, de sólido a líquido, y aunque se suministre calor en la misma proporción, la temperatura permanece en 0°C, hasta que se ha fundido todo el hielo. Cuando termina la fusión del hielo, la temperatura comienza a elevarse. Cuando se alcanzan los 100°C, punto **c** del gráfico, comienzan a escapar burbujas (vapor de agua) o sea, el agua comienza a hervir. La temperatura se mantiene constante hasta que desaparece toda el agua líquida. Se ha producido otro cambio de fase, de líquido a gaseoso. La cantidad de calor por unidad de masa que es necesario suministrar a una sustancia que se halla en su punto de fusión, para convertirla completamente en líquido a temperatura constante, se llama calor de fusión de la sustancia; para el hielo es de 80 cal/gr.

La cantidad de calor por unidad de masa que se debe suministrar a una sustancia en su punto de ebullición, para convertirla por completo en gas, se llama calor de vaporización, para el agua es 539 cal/gr. Todas las sustancias tienen distintos puntos de fusión y de ebullición.

Cuando se sustrae calor a un gas, su temperatura desciende, y a una temperatura igual a la de ebullición, vuelve a la fase líquida, o sea se condensa. Devuelve al medio que lo rodea una cantidad de calor igual a la consumida para la vaporización. El calor devuelto por unidad de masa se llama calor de condensación y es igual al calor de vaporización.

Análogamente, un líquido vuelve a la fase sólida si se lo enfría hasta la temperatura de fusión, y cede el calor de solidificación que es igual al calor de fusión.

La expresión calor de transformación se aplica tanto al calor de fusión como al de vaporización y se designa con **L** y representa el calor absorbido o liberado en el cambio de fase de la unidad de masa, el calor **Q** absorbido o liberado en el cambio de fase de una masa **m** es:

$$Q = L \bullet m \quad \left[\frac{cal}{gr} \bullet gr \right]$$

Ejemplos cotidianos

El sistema de calefacción por vapor utiliza un proceso de ebullición-condensación, para transmitir calor desde la caldera a los radiadores. Cada Kg. de agua que se convierte en vapor en la caldera absorbe 539 Kcal (calor de vaporización), y libera esa misma cantidad de calor cuando se condensa en los radiadores.

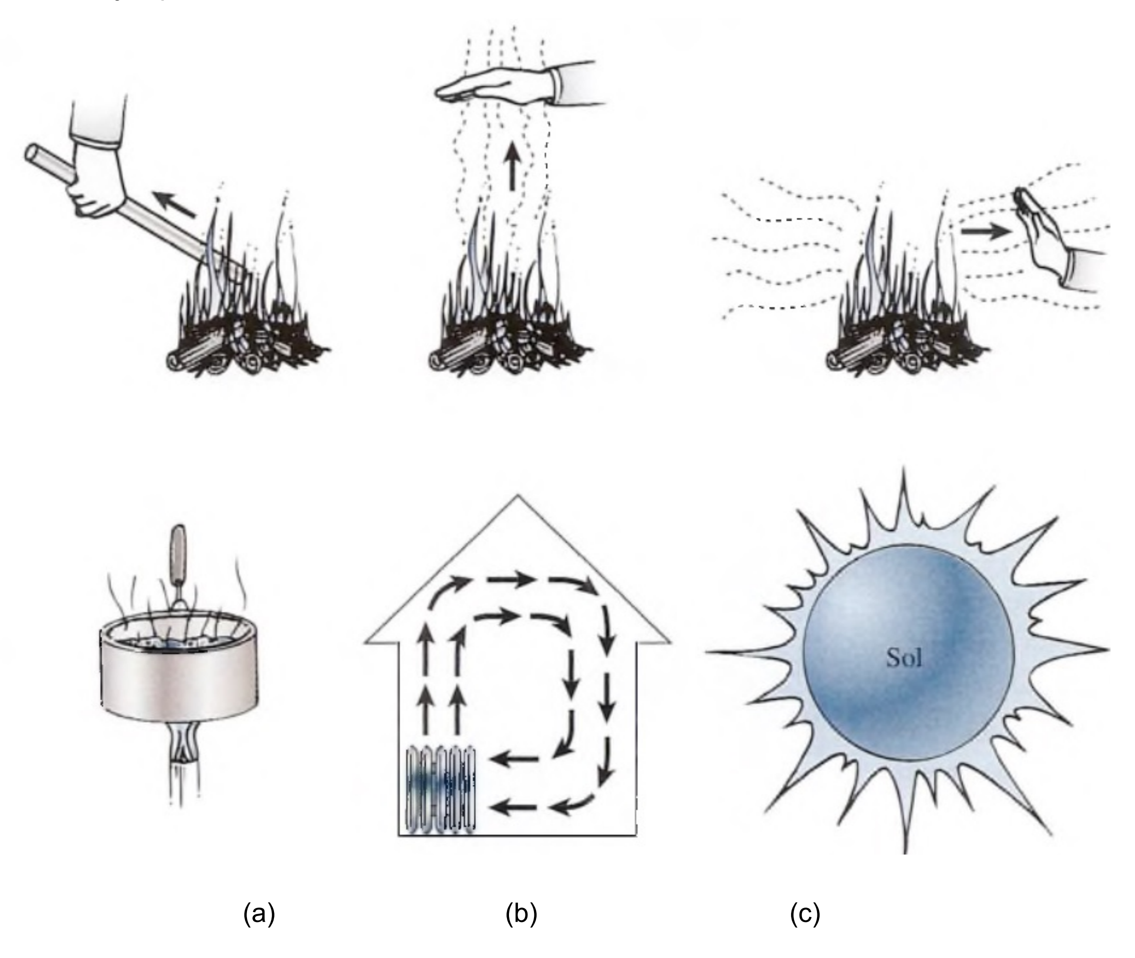
En el sistema de calefacción por vapor no es necesario hacer circular tanta agua como en el sistema de calefacción por agua caliente. Si el agua sale a 60°C y vuelve a 38°C, disminuyendo su temperatura en 22 °C tienen que circular unos 24 Kg. de agua para transportar el mismo calor que 1 Kg. de vapor.

◊ Un trozo de hielo puede no fundirse con la llama de un sólo fósforo, porque aunque la temperatura de la llama es muy alta, la cantidad de calor cedida no es suficiente para fundir el hielo.

◊ Al introducir un trozo de hielo en un recipiente con agua tibia, el hielo se fundirá, pues, aunque la temperatura del agua no sea muy elevada, puede ceder una gran cantidad de calor.

Transferencia de calor

Nos hemos referido al calor como una forma de energía en tránsito. Siempre que hay una diferencia de temperatura entre dos cuerpos o entre dos partes de un mismo cuerpo se dice que el calor *fluye* en la dirección de mayor a menor temperatura. Hay tres formas principales por los que ocurre tal intercambio de calor: c*onducción, convección y radiación*. En la figura se muestran ejemplos de los tres.



Las tres formas de transferencia de calor (a) conducción, (b) convección y (c) radiación.

Formas de transferencia de calor

La mayor parte de nuestra explicación ha supuesto la transferencia de calor por *conducción*: mediante colisiones moleculares entre moléculas vecinas. Por ejemplo, si sostenemos con una

mano un extremo de una barra de hierro y metemos el otro en el fuego, al cabo de cierto tiempo el calor llegará hasta nuestra mano a causa de un proceso de conducción. El incremento de la actividad molecular en el extremo calentado va pasando de una a otra molécula hasta que llega a nuestra mano. El proceso continua mientras haya una diferencia de temperatura a lo largo de la barra.

La conducción es el proceso por el que se transfiere energía térmica mediante colisiones de moléculas adyacentes a lo largo de un medio material. El medio en si no se mueve.

La aplicación más frecuente del principio de conducción probablemente es la de cocinar: el calor de la llama se conduce a través de la olla. Por otra parte, si colocamos la mano por encima del fuego podemos sentir la transferencia de calor al elevarse el aire caliente. Este proceso, llamado *convección*, difiere del de conducción porque el medio material sí se mueve. El calor transferido mediante el movimiento de masas, en vez de ir pasando de una a otra molécula vecina.

La convección es el proceso por el que se transfiere calor por medio del movimiento real de la masa de un fluido.

Las corrientes de convección constituyen la base de los sistemas para calentar y enfriar la mayoría de las casas. Cuando colocamos nuestra mano en la proximidad del fuego, la principal fuente de calor es la radiación térmica. La radiación implica la emisión o absorción de ondas electromagnéticas que se originan en el nivel atómico. Estas ondas viajan a la velocidad de la luz ($3x10^6$ m/s) y no requieren la presencia de ningún medio material para propagarse.

La radiación es el proceso por el que el calor se transfiere mediante ondas electromagnéticas.

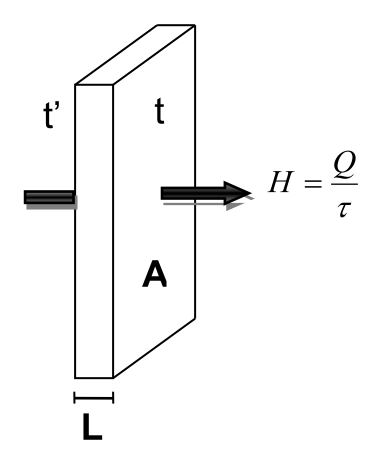
La fuente más evidente de energía radiante es nuestro propio Sol. Ni la conducción ni la convección pueden intervenir en el proceso de transferencia que hace llegar su energía térmica, a través del espacio, hasta la Tierra. La enorme cantidad de energía térmica que recibe nuestro planeta se transfiere por radiación electromagnética. Sin embargo, cuando entra en juego un medio material, la transferencia de calor que se puede atribuir a la radiación generalmente es pequeña, en comparación con la cantidad que se transfiere por conducción y convección.

Por desgracia, hay gran número de factores que afectan la transferencia de energía térmica por las tres formas. La tarea de calcular la cantidad de energía térmica transferida en cierto proceso es complicada. Las relaciones, que se analizarán en las secciones que siguen, se basan en observaciones empíricas y se consideran condiciones ideales. El grado en que sea posible encontrar esas condiciones determina, en general, la exactitud de nuestras predicciones.

Conducción

Cuando dos partes de un material se mantienen a temperaturas diferentes, la energía se transfiere por colisiones moleculares desde la más alta a la más baja temperatura. Este proceso de conducción es favorecido también por el movimiento de electrones libres en el interior de la sustancia, los cuales se han disociado de sus átomos de origen y tienen la libertad de moverse de uno a otro átomo cuando son estimulados ya sea térmica o eléctricamente. La mayoría de los metales son eficientes conductores del calor porque tienen cierto número de electrones libres que pueden distribuir calor, además del que se propaga por la agitación molecular. En general, un buen conductor de la electricidad también lo es del calor.

La ley fundamental de la conducción térmica es una generalización de resultados experimentales relacionados con el flujo de calor a través de un material en forma de placa. Consideremos la placa de espesor L y área A de la siguiente figura. Una cara se mantiene a una temperatura t y la otra a una temperatura t'. Se mide la cantidad de calor Q que fluye en dirección perpendicular a la cara durante un tiempo τ. Si se repite el experimento para diversos materiales de diferentes espesores y áreas de la cara, estaremos en condiciones de hacer algunas observaciones generales relacionadas con la conducción de calor:



Medición de la conductividad térmica

1. La cantidad de calor transferido por unidad de tiempo es directamente proporcional a la diferencia de temperatura ($\Delta t = t' - t$) entre las dos caras.

2. La cantidad de calor transferido por unidad de tiempo es directamente proporcional al área A de la placa.

3. La cantidad de calor transferido por unidad de tiempo es inversamente proporcional al espesor L de la placa.

Estos resultados se pueden expresar en forma de ecuación introduciendo la constante de proporcionalidad k. Así pues, escribimos

$$H = \frac{Q}{\tau} = kA\frac{\Delta t}{L}$$

Donde H representa la razón con la que se transfiere el calor. Aún, cuando la ecuación se estableció para un material en forma de placa, también se cumple para una barra de sección transversal A y longitud L. La constante de proporcionalidad k es una propiedad de cada material que se conoce como ***conductividad térmica***. A partir de la ecuación anterior, se puede observar que las sustancias con alta conductividad térmica son buenas conductoras del calor, mientras que las sustancias con baja conductividad son conductoras pobres o *aislantes.*

La conductividad térmica de una sustancia es una medida de su capacidad para conducir el calor y se define por medio de la relación:

$$k = \frac{QL}{\tau A \Delta t}$$

El valor numérico de la conductividad térmica depende de las unidades elegidas para calor, espesor, área, tiempo y temperatura. Sustituyendo con las unidades del SI para cada una de estas cantidades obtenemos las unidades aceptadas siguientes:

Unidades del SI: $J/s.m.°C$ o bien $W/m.K$

Como se recordará, el joule por segundo (J/s) es la potencia en watts (W), y los intervalos de temperatura kelvin y Celsius son iguales.

Por desgracia, hoy en día las unidades SI de la conductividad se usan poco en la industria; la elección de las unidades empleadas se basa más en el criterio de la comodidad de la medición. Por ejemplo, en el SUEU, el calor se mide en Btu, el espesor en pulgadas, el área en pies cuadrados, el tiempo en horas y el intervalo de temperatura en grados Fahrenheit. En consecuencia, las unidades de la conductividad térmica a partir de la ecuación anterior son

SUEU: k = Btu .in/ft^2. h.°F

En el sistema métrico, en el caso de la transferencia de calor se emplean con más frecuencia las calorías que el joule: por tanto, las unidades siguientes se usan a menudo:

Unidades métricas: k = Kcal/m.s.°C

Los factores de conversión siguientes son útiles.

$$1 \text{ kcal/s.m.°C} = 4186 \text{ W/m.K}$$

$$1 \text{ Btu.in/ft}^2\text{.h.°F} = 3{,}445 \times 10^{-5} \text{ kcal/m.s.°C}$$

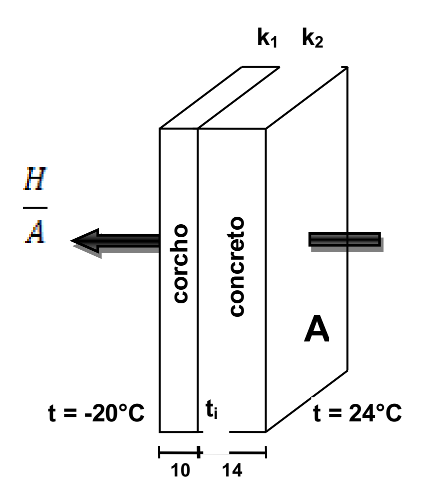
Las conductividades térmicas de diversos materiales se muestran en la siguiente tabla

	Conductividades térmicas, *k*			Valores *R* *(espesor de 1 pulgada)*
Sustancia	W/m.K	Kcal/m.s.ºC	Btu.in/ft2.h.ºF	Ft^2.h.ºF/Btu
Aluminio	205	$5{,}0 \times 10^{-2}$	1451	0,00069
Latón	109	$2{,}6 \times 10^{-2}$	750	0,0013
Cobre	385	$9{,}2 \times 10^{-2}$	2660	0,00038
Plata	406	$9{,}7 \times 10^{-2}$	2870	0,00035
Acero	50,2	$1{,}2 \times 10^{-2}$	320	0,0031
Ladrillo	0,7	$1{,}7 \times 10^{-4}$	5,0	0,2
Concreto	0,8	$1{,}9 \times 10^{-4}$	5,6	0,18
Corcho	0,04	$1{,}0 \times 10^{-5}$	0,3	3,3
Cartón de yeso	0,16	$3{,}8 \times 10^{-5}$	1,1	0,9
Fibra de vidrio	0,04	$1{,}0 \times 10^{-5}$	0,3	3,3
Vidrio	0,8	$1{,}9 \times 10^{-4}$	5,6	0,18
Poliuretano	0,024	$5{,}7 \times 10^{-6}$	0,17	5,9
Forro de madera	0,55	$1{,}3 \times 10^{-5}$	0,38	2,64
Aire	0,024	$5{,}7 \times 10^{-6}$	0,17	5,9
Agua	0,6	$1{,}4 \times 10^{-4}$	4,2	0,24

Siempre es conveniente indicar cuáles son las unidades que corresponden a cada cantidad durante la resolución de un problema. Esta práctica evitará muchos errores innecesarios. Por ejemplo, a veces es fácil olvidar que, en las unidades del SUEU, el espesor debe expresarse en pulgadas y el área en pies cuadrados. Si durante la sustitución las unidades de la conductividad térmica se indican junto con su respectivo valor numérico, no se cometerá este tipo de errores.

Cuando se conectan dos materiales de diferente conductividad, la razón a la que se conduce el calor a través de cada uno de ellos debe ser constante. Si no hay fuentes o sumideros de energía térmica dentro de los materiales y los extremos se mantienen a temperaturas constantes, se logrará finalmente un flujo estacionario, ya que el calor no puede “acumularse” ni “acelerarse” en un punto determinado. La conductividad de los materiales no cambia y el espesor es fijo, lo que significa que los intervalos de temperatura de cada material deben ajustarse para producir el flujo estacionario de calor a lo largo de la estructura compuesta.

Por ejemplo: Si una pared compuesta de una planta congeladora está formada por una capa de corcho de 10 cm de espesor en el interior y una pared de concreto sólido de 14 cm de espesor en el exterior (ver figura). La temperatura de la superficie interior de corcho es de -20 °C, y la superficie exterior de concreto se encuentra a 24 °C. a) Determinar la temperatura de la interfaz o zona de contacto entre el corcho y el concreto. b) Calcular la razón de flujo de calor perdido de calor en watts por metro cuadrado.



En el caso de un flujo estacionario, la [illegible] de flujo de calor a través de la cubierta de corcho es igual a la razón de flujo de calor a través del concreto. Como las áreas son las mismas, podemos igualar las razones de flujo de calor por unidad de área (H/A) para la pared de corcho y para la pared de concreto. Con base en esta ecuación podemos determinar la temperatura de la zona de contacto y luego usar el resultado para encontrar la razón de flujo de calor por cualquiera de las paredes, ya que las razones son iguales.

Solución a)

Se consulta en la tabla la conductividad del corcho y la del concreto. Usaremos el subíndice 1 para denotar el corcho y el 2 para el concreto. Con t_i se representará la temperatura en la zona de contacto de ambos materiales. Como H/A es igual en los dos, podemos escribir

$$\frac{H_1}{A_1}(corcho)=\frac{H_2}{A_2}(concreto)$$

$$\frac{k_1\left[t_i-(-20°C)\right]}{0{,}10m}=\frac{k_2\left(24°C-t_i\right)}{0{,}14m}$$

$$\frac{(0{,}04W/m.K)\left[t_i+20°C\right]}{0{,}10m}=\frac{(0{,}8W/m.K)\left(24°C-t_i\right)}{0{,}14m}$$

Ahora, para simplificar multiplicamos cada término por 14 para obtener

$$5{,}6\left(t_i+20°C\right)=80\left(24°C-t_i\right)$$

$$t_i=21{,}1°C$$

Solución b)

El flujo de calor por unidad de área por unidad de tiempo puede encontrarse ahora partiendo de la ecuación inicial, ya sea que se aplique al corcho o al concreto.

Para el concreto tenemos

$$\frac{H_2}{A_2}=\frac{k_2\left(24°C-t_i\right)}{0{,}14m}$$

$$=\frac{(0{,}8W/m.K)\left(24°C-21{,}1°C\right)}{0{,}14m}=\frac{0{,}8W}{m.K}\cdot\frac{2{,}9°C}{0{,}14m}$$

$$=16{,}57W/m^2$$

Observe que el intervalo kelvin y el Celsius se cancelan mutuamente, ya que ambos son iguales. La misma razón se calcularía para el corcho. La diferencia de temperatura entre los puntos extremos del corcho es 41,1 °C, mientras que la diferencia de temperatura del concreto es de sólo 2,9 °C. Los intervalos de temperatura diferentes resultan principalmente de la diferencia en la conductividad térmica de las paredes.

Aislamiento: el valor R

Las pérdidas de calor en los hogares e industrias con frecuencia se deben a las propiedades aislantes de sus diversos muros compuestos. A veces se desea saber, por ejemplo, cuáles serían los efectos de remplazar con material aislante de fibra de vidrio los espacios cerrados (sin ventilación) que se encuentran entre los muros. Para resolver esos casos en varias aplicaciones de ingeniería se ha introducido el concepto de ***resistencia térmica R***. el valor R de un material de espesor L y de conductividad térmica k se define de este modo:

$$R=\frac{L}{k}$$

Si reconocemos que el flujo de calor de estado estacionario por un muro compuesto es constante (véase el ejemplo anterior) y aplicamos la ecuación de conductividad térmica a cierto número de espesores de diferentes materiales, se puede demostrar que

$$\frac{Q}{\tau} = \frac{A\Delta t}{\sum_i \left(L_i / k_i \right)} = \frac{A\Delta t}{\sum_i R_i}$$

La cantidad de calor que fluye por unidad de tiempo (Q/τ) a través de cierto número de espesores de diferentes materiales es igual al producto del área A y la diferencia de temperatura Δt dividido entre la suma de los valores R de esos materiales. Los valores R de los materiales de construcción de uso más frecuente se expresan casi siempre en unidades del SUEU, como se muestra en la tabla. Por ejemplo, el aislante de fibra de vidrio para techos, que tiene 6 in. De espesor, tiene un valor R de 18,8 ft^2. F°.h/Btu. Un ladrillo de 4 pulgadas tiene un valor r de 4 ft^2. F°.h/Btu. Estos materiales, colocados uno al lado del otro, tendrían un valor R total de 22,8 ft^2. F°.h/Btu.

Por ejemplo:

A) Suponemos tener una pared de ladrillos de 5 metros de largo por 3,5 metros de alto y 15 centímetros de espesor, la temperatura interior t_i es 18°C y la temperatura exterior es t_e es 40°C. Queremos saber la cantidad de calor por unidad de tiempo que penetra a través de la pared.

Te Ti

40 ºC 18 ºC

e = 15 cm

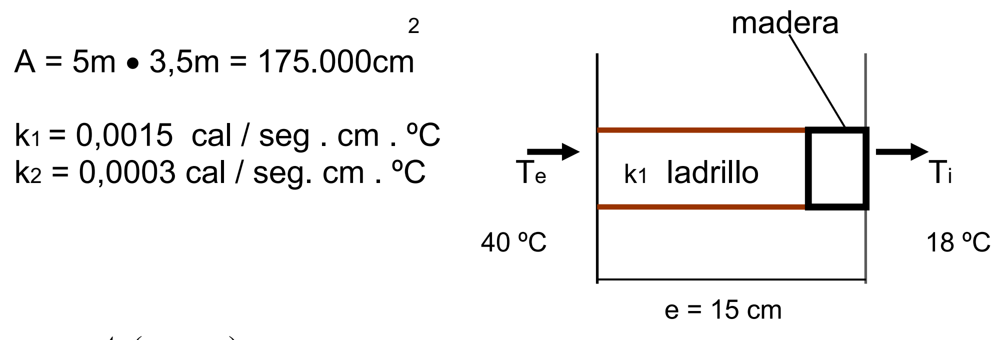
A = 5 m • 3,5 m = 17,5 m^2. = 175.000 cm².

$$k = 0{,}0015 \frac{cal}{seg \bullet cm \bullet {}^\circ C}$$

$$H = \frac{kA\,(t_e - t_i)}{L} = 0{,}0015 \frac{cal}{seg \bullet cm \bullet {}^\circ C} \bullet \frac{175.000\,cm^2\,(40-18)^\circ C}{15\,cm}$$

$$H = 385 \frac{cal}{seg} = 1.611{,}61 \frac{Joule}{seg} = 1611\,Watt$$

B) Suponemos que a la pared de ladrillo del ejemplo anterior le colocamos 1cm. de madera de revestimiento. Veamos si la corriente calorífica que penetra es menor.



$$H = \frac{A \cdot (t_e - t_i)}{\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}}$$

reemplazando:

$$H = \frac{175.000\, cm^2\ (40-18)^\circ C}{\frac{15\, cm}{0{,}0015 \frac{cal}{seg \cdot cm \cdot ^\circ C}} + \frac{1\, cm}{0{,}0003 \frac{cal}{seg \cdot cm \cdot ^\circ C}}}$$

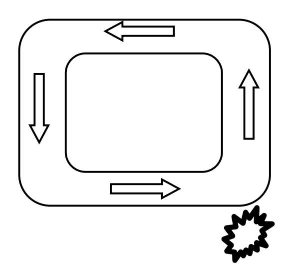
simplificando, resulta:

$$H = 288{,}75 \frac{cal}{seg}$$

Cantidad significativamente menor

Convección

La *convección* se ha definido como el proceso por el que el calor es transferido por medio del movimiento real de la masa de un medio material. Una corriente de líquido o de gas que absorbe energía de un lugar y lo lleva a otro, donde lo libera a una porción más fría del fluido recibe el nombre de ***corriente de convección***. En la figura se presenta una demostración de laboratorio acerca de una corriente de convección. Una sección rectangular de tubería de vidrio se llena de agua y se calienta en una de las esquinas inferiores. El agua que está cerca de la flama se calienta y se dilata, volviéndose menos densa que el agua más fría que está sobre ella. A medida que el agua caliente se eleva, es remplazada por agua más fría del tubo inferior. Este proceso continúa hasta que una corriente de convección contraria al movimiento de las agujas del reloj circula por la tubería. La existencia de dicha corriente se demuestra en forma ostensible dejando caer gotas de tinta por la parte superior abierta. La tinta es transportada por la corriente de convección hasta que finalmente regresa a la parte de arriba, proveniente de la sección derecha de la tubería.



Ejemplo de la convección natural

Corrientes de convección de ambos tipos, natural y forzada, se presentan en el proceso de calentar una casa con un calentador de gas convencional, como el que se muestra en la siguiente figura. Un intercambiador de calor lo transfiere de las flamas del gas al contenedor de metal. El calefactor obliga al aire a pasar por el contenedor caliente y luego por los conductos de la casa. El aire regresa por otro conjunto de tubos y vuelve a entrar en el horno a través de un filtro. Un termostato mide la temperatura de la casa y regula el calefactor y la fuente de combustible para suministrar la cantidad de calor deseada. Los primeros calefactores de gas desperdiciaban cerca de 40% de la energía que se les suministraba; hoy, los más modernos llegan a alcanzar eficiencias de 90% gracias a que se utilizan mecanismos como vapor condensado o cámaras de combustión selladas.

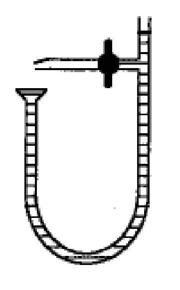
Calcular el calor transferido por convección es una tarea sumamente difícil. Muchas de las propiedades físicas de un fluido dependen de la temperatura y de la presión; por eso en la mayor parte de los casos sólo se puede hacer un cálculo aproximado del proceso.

A diferencia de la conductividad térmica, la convección no es una propiedad del sólido o del fluido, sino que depende de muchos parámetros del sistema. Se sabe que varía según la geometría del sólido y el acabado de su superficie, la velocidad y la densidad del fluido y la conductividad térmica. Las diferencias de presión influyen también en la transferencia de calor por convección. Para entender cómo la convección es afectada por la geometría, sólo hay que considerar las diferencias evidentes que se presentan por un piso cuya cara está hacia arriba o por un cielorraso cuya cara está hacia abajo.

Ejemplos cotidianos

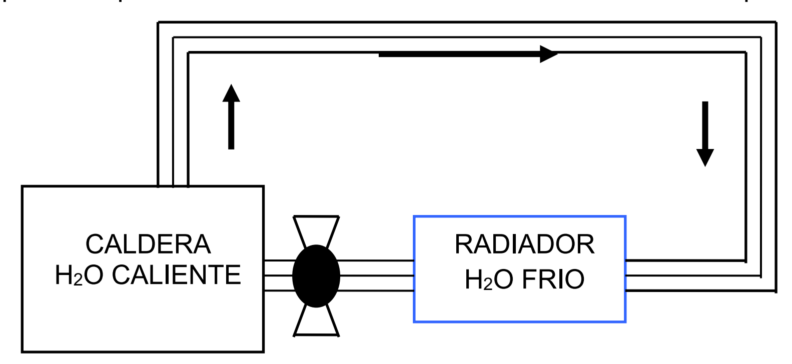
◊ Si tenemos una habitación calefaccionada con una estufa, al estar el aire en contacto con la misma aumenta su temperatura, se hace más liviano y entonces sube. Se producen corrientes ascendentes de aire caliente y descendentes de aire frío.

◊ Supongamos que tenemos un tubo en **U**, lleno de agua a la misma temperatura en ambas ramas: el nivel en ambas ramas es el mismo.



Si calentamos la rama derecha, el agua se dilata y como la densidad es menor, entonces se necesita mayor columna para equilibrar la presión del agua fría en la rama de la izquierda. Abriendo la llave, el agua pasa de la parte superior de la columna de agua caliente a la fría; con lo que aumenta la presión en el fondo del lado de la fría y disminuye del lado de la caliente; por lo tanto, el agua pasará del lado frío al caliente y si seguimos suministrando calor al lado derecho, la circulación se mantiene.

Este principio es el que se utiliza en el sistema doméstico de calefacción por agua caliente.



La teoría matemática de la convección del calor es muy complicada y no existe ninguna ecuación sencilla como en la conducción.

Esto se debe a que el calor ganado o perdido por una superficie a una temperatura en contacto con un fluido a otra temperatura distinta depende de:

a) que la superficie sea curva o plana.
b) que la superficie esté colocada en forma horizontal o vertical.
c) que el fluido en contacto con la superficie sea gas o líquido.
d) de la densidad, de la viscosidad, de la conductividad térmica del fluido.
e) de la velocidad con que se mueve el fluido o si hay turbulencias.
f) si existe evaporación o condensación.

Radiación

El término *radiación* se refiere a la emisión continua de energía en forma de ondas electromagnéticas originadas en el nivel atómico. Ejemplos de ondas electromagnéticas son los rayos gamma, los rayos X, las ondas de luz, los rayos infrarrojos, las ondas de radio y las de radar, la única diferencia que hay entre ellas es la longitud de onda. En esta sección estudiaremos la *radiación térmica.*

La radiación térmica se debe a ondas electromagnéticas emitidas o absorbidas por un sólido, un líquido o un gas debido a su temperatura.

Todos los objetos con una temperatura superior al cero absoluto emiten energía radiante. A bajas temperaturas, la razón de emisión es pequeña y la radiación es predominantemente de longitudes de onda grandes. A medida que la temperatura se eleva, esa razón aumenta rápidamente y la radiación predominante corresponde a longitudes de onda más cortas. Si se caliente sin parar una barra de hierro, finalmente emitirá radiación en la región visible; de ese hecho han surgido las expresiones *caliente al rojo vivo* y *caliente al blanco.*

Las mediciones experimentales han demostrado que la razón a la que es radiada la energía térmica desde una superficie *varía directamente a la cuarta potencia de la temperatura absoluta del cuerpo radiante.* Dicho de otro modo, si la temperatura de un objeto se duplica (medida en ºK) la razón con la que emite energía térmica se incrementa dieciséis veces.

Un factor adicional que ha de considerarse al calcular la razón de transferencia de calor por radiación es la naturaleza de las superficies expuestas. Los objetos que son emisores eficientes de la radiación térmica son también eficientes para absorberla. Un objeto que absorbe toda la radiación que incide sobre su superficie se llama ***absorbedor ideal.*** Un objeto de este tipo será también un ***radiador ideal***. No existe un absorbedor realmente ideal; pero, en general, cuanto más negra sea una superficie, tanto mejor absorberá la energía térmica. Por ejemplo, una camisa negra absorbe más energía radiante solar que una camisa más clara. Puesto que la camisa negra es también buena emisora, su temperatura externa será más alta que la temperatura de nuestro cuerpo, lo cual hace que nos sintamos incómodos.

A veces un absorbedor ideal o un radiador ideal se conoce como ***cuerpo negro*** por las razones mencionadas. La radiación emitida por un cuerpo negro se denomina ***radiación de cuerpo negro.*** Aunque tales cuerpos no existen en realidad, el concepto es útil como un patrón para comparar la ***emisividad*** de diversas superficies.

La emisividad e es una medida de la capacidad de un cuerpo para absorber a emitir radiación térmica.

La emisividad es una cantidad adimensional que tiene un valor numérico entre 0 y 1, según la naturaleza de la superficie. En el caso de un cuerpo negro, es igual a la unidad. Para una superficie de plata perfectamente pulida el valor de la emisividad se aproxima a cero.

La ***razón de radiación R*** de un cuerpo se define formalmente como la energía radiante emitida por unidad de área por unidad de tiempo; dicho de otro modo, la potencia por unidad de área. En forma simbólica esto se expresa

$$R = \frac{E}{\tau A} = \frac{P}{A}$$

Si la potencia radiante P se expresa en watts y la superficie A en metros cuadrados la razón de radiación estará expresada en watts por metro cuadrado. Como ya lo hemos dicho, esta razón depende de dos factores: la temperatura absoluta *T* y la emisividad *e* del cuerpo radiante. El enunciado formal de esta dependencia, conocida como la ***Ley de Stefan-Boltzmann***, se puede escribir como

$$R = \frac{P}{A} = e\sigma T^4$$

La constante de proporcionalidad *σ* es una constante universal completamente independiente de la naturaleza de la radiación. Si la potencia radiante se expresa en watts y la superficie en metros cuadrados, *σ* tiene el valor de 5,67 x 10^{-8} $W/m^2.K^4$. La emisividad *e* tiene valores de 0 a 1, según la naturaleza de la superficie radiante.

- Una masa de tierra cubierta de hielo

  La Antártica es un continente cubierto de hielo. En invierno la extensión del hielo aumenta, ya que un área de océano de aproximadamente 15 millones de kilómetros cuadrados se vuelve hielo marítimo. El hielo del mar es un aislador muy eficaz. La pérdida de calor ocasionada por los bolsones de mar abierto puede superar hasta en dos órdenes de magnitud a la pérdida de calor del hielo. Cuando el agua de mar se congela la sal contenida en el océano no se congela junto con el hielo. Así, el agua de mar que está debajo del hielo se vuelve más salada. Esta diferencia en salinidad o concentración de sal genera una importante corriente oceánica. El hielo que está cubierto de nieve refleja mucho más la luz que el océano abierto. Esto reduce en gran medida la cantidad de luz disponible para la fotosíntesis bajo el hielo. En lo que se refiere a la transferencia de calor, el efecto de aislamiento y la producción de corrientes oceánicas, el hielo marítimo que está alrededor de la Antártica es determinante para el clima de nuestro planeta.

Por ejemplo: ¿Qué potencia será radiada por una superficie esférica de plata de 10 cm. de diámetro si su temperatura es de 527 °C? La emisividad de la superficie es 0,04.

Las unidades son muy importantes. Debemos convertir 527°C en kelvins y determinar el área de la superficie esférica en metros cuadrados (m^2). La potencia radiada de la superficie puede hallarse entonces resolviendo la ecuación para *P*.

El radio es la mitad del diámetro, así que *R* = 0,05m. Luego, el área es

$$A = 4\pi R^2 = 4\pi(0{,}05m)^2; \qquad A = 0{,}0314m^2$$

La temperatura absoluta es

T = 527 + 273 = 800 K

Despejando *P* de la ecuación se obtiene

$$P = e\sigma AT^4$$
$$= (0{,}04)(5{,}67x10^{-8} W/m^2.K^4)(0{,}0314m^2)(800K)^4$$
$$= 29{,}2W$$

Hemos dicho que todos los objetos emiten radiación sin cesar, independientemente de su tempertura. Si esto es cierto, ¿cómo es que no se les agota su "combustible"? La respuesta es que se les *agotaría* si no se les proporcionara más. El filamento de un foco de luz eléctrica se enfría más rápidamente a la temperatura ambiente cuando se interrumpe el suminstro de energía eléctrica. No se sigue enfriando, puesto que al llegar a este punto, el filamento está absorbiendo energía radiante a la misma razón que la está emitiendo. La ley que sirve de fundamento a este fenómeno se conoce como ***Ley de Prevost del intercambio de calor:***

Un cuerpo que se halla a la misma temperatura que sus alrededores irradia y absorbe calor con la misma razón.

Cuando un objeto y lo que lo circunda tienen la misma temperatura, la energía radiante emitida es la misma que la absorbida. La razón con la que un cuerpo absorbe energía está dada también por la ley de Stefan-Boltzmann. Por tanto, podemos calcular la transferencia neta de energía radiante emitida por un objeto rodeado por paredes a diferentes temperaturas. Considere un delgando filamento de alambre de una lámpara que está cubierto con una envoltura, como en el caso de una bombilla eléctrica. Denotemos la temperatura del filamento con T_1 y la del recubrimiento con T_2. La emisividad del filamento es *e* y sólo consideraremos los procesos radiantes positivos. En este ejemplo se advierte que

La energía neta emitida por un radiador en un entorno que tiene diferente temperatura.

Razón de radiación neta = razón de emisión de energía – razón de absorción de energía.

$$R = e\sigma T_1^4 - e\sigma T_2^4$$
$$R = e\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

Esta ecuación puede aplicarse a cualquier sistema para calcular la energía neta emitida por un radiador a temperatura T_1 y emisividad *e* en presencia de los alrededores a temperatura T_2

Cuestiones energéticas

⇒ Justificar: Si se sostiene una barra de hierro de manera que uno de los extremos esté en

contacto con un trozo de hielo, el otro extremo pronto se enfría. ¿Significa esto que hay un flujo de frío del hielo hacia tu mano?

⇒ Justificar: Si un buen absorbente de energía radiante fuese un mal emisor. ¿Cómo sería su temperatura respecto a la de su entorno?

⇒ Calcular:

a) el flujo de calor a través del vidrio de una ventana de 1 m² de superficie y 12 mm. de espesor, si la temperatura interior es 20°C y la exterior 0°C.

b) el flujo de calor si la ventana consta de dos vidrios de 6 mm. cada uno, que encierran una caja de aire de 2 cm de espesor.

$$Kv = 2 \times 10^{-4} \frac{Kcal}{seg\ m\ °C} \qquad Ka = 5,7 \times 10^{-6} \frac{Kcal}{seg\ m\ °C}$$

⇒ ¿Qué cantidad de calor pierde en un minuto, a través de sus cuatro paredes de ladrillo, una habitación cuyo suelo tiene un área de 4 x 5 m² y cuya altura es de 3 m. La temperatura dentro de la habitación es de 15°C y la temperatura exterior es -20°C. El coeficiente de conductividad térmica es de 0,002 cal/cm s °C, y el espesor de las paredes es de 50 cm. Despreciar las pérdidas de calor por suelo y el techo. Suponer que hay viento en el exterior y convección forzada en el interior.

⇒ Un tanque cilíndrico para agua caliente tiene un diámetro interno de 0,36 m. y una altura de 1,35 m. Está aislado con una capa de lana de vidrio de 4 cm. cuyo coeficiente de conductividad térmica es de 0,38 W/m °. Las paredes interior y exterior de metal tienen un coeficiente de conductividad de varios órdenes de magnitud mayor que el de la lana de vidrio. Si la temperatura interior debe mantenerse en 75°C y la exterior es 20°C.

a) ¿A qué velocidad debe suministrarse energía al tanque? (considerar también la transmisión a través de la tapa y del fondo).

b) ¿Dónde es conveniente colocar el calentador eléctrico, en la parte superior o inferior del líquido? ¿por qué?

⇒ Un tanque de las dimensiones del problema anterior se encuentra a la intemperie y está pintado de negro. Estimar qué cantidad de calor por segundo pierde por radiación durante la noche si su temperatura es de 27°C y la temperatura del firmamento es 3°K.

Actividades

1. ¿Por qué se requiere más acondicionamiento de aire para enfriar el interior de un automóvil color azul marino, que un automóvil blanco del mismo tamaño?

2. Si se intenta diseñar una casa que ofrezca la máxima comodidad tanto en verano como en invierno, ¿preferiría usted que tuviera el techo claro u oscuro? Explique su respuesta.
3. ¿El aire caliente que se encuentra sobre el fuego se eleva o es empujado hacia arriba por las llamas?
4. ¿Es conveniente pintar un radiador de agua caliente o vapor con un emisor eficiente o con uno deficiente? Si se pinta de negro, ¿será más eficiente? ¿Por qué?
5. ¿Qué proceso es más rápido, la conducción o la convección? Dé un ejemplo para justificar su conclusión.
6. Un panel de vidrio de una ventana mide 10 in. de ancho, 16 in de largo y 1/8 in. de espesor. La superficie interior está a 60° F y la exterior a 20° F. ¿Cuántos Btu se transfieren al exterior en 2 horas?
7. ¿Cuánto calor se pierde en 12 h a través de una pared de ladrillo refractario de 3 in y un área de 10 ft^2 si uno de los lados está a 330°F y el otro a 78°F?
8. Una pared de 6 m de longitud y 3 m de altura está formada por 12 cm de concreto unidos a 10 cm de tabla de corcho. La temperatura interior es de 10°C y la exterior de 40°C. Halle la temperatura en la superficie de unión de los dos materiales.
9. Un panel de vidrio de una ventana mide 60 cm. de ancho, 1,8 m. de alto y 3 mm. De espesor. La temperatura interior es de 20°C y la exterior de -10°C. ¿Cuánto calor escapa de la casa a través de esta ventana en 1 hora?
10. ¿Qué espesor de concreto se requiere para alcanzar el mismo valor de aislamiento que 6 cm. de fibra de vidrio?
11. La pared de una planta frigorífica consiste en 6m. de concreto y 4 in. de tabla de corcho. La temperatura de la superficie interna del corcho es de -15°F y la de la superficie externa de 70°F. ¿Cuál es la temperatura de la superficie de contacto entre el corcho y el concreto? ¿Cuánto calor es conducido a través de cada pie cuadrado de esa pared en una hora?

Ondas

Conocer acerca de la ciencia actual implica, entre otras cosas, entender ciertos fenómenos vinculados al porque y el cómo se agitan y menean los cuerpos, hasta los átomos se agitan y se menean constantemente. Este tipo de movimientos recibe el nombre de **vibración**, la cual no dura un instante, sino que necesita de tiempo para poder trasladarse de un lugar a otro. Este movimiento en el espacio y en el tiempo es una **onda**.

Muchas de nuestras experiencias sensoriales cotidianas dependen de las ondas: ondas de luz para ver, ondas de sonido para oír, ondas de radio para llevar información visual y audible, ondas eléctricas y microondas para transmitir nuestras conversaciones telefónicas. Por ello resulta importante conocer acerca de su comportamiento y propiedades.

Los sonidos y las imágenes llegan hasta nosotros a través de ondas, las cuales transportan energía en forma de luz o de sonido, es decir, *la luz y el sonido son formas de energía que se*

propagan en el espacio como ondas. La energía de la luz solar, por ejemplo, ilumina los ambientes, calienta la Tierra y hace crecer las plantas; la de una detonación, por ejemplo, la producida por un avión a reacción al romper la barrera del sonido, puede hacer vibrar edificios y ventanas. Luz y sonido difieren en otros aspectos. La onda sonora sólo se desplaza a través de gases, líquidos y gases, mientras que la onda luminosa también lo puede hacer en el vacío. Otra diferencia notoria es posible comprenderla analizando la descarga de un rayo, éste libera grandes cantidades de energía sonora y luminosa. El trueno y el resplandor de la tempestad puede oírse y verse a gran distancia. El relámpago es visible antes de oírse el trueno porque la luz es casi un millón de veces más veloz que el sonido.

A modo de síntesis:

Una onda es un fenómeno en el que una magnitud física *varía con el espacio y con el tiempo* de manera que es capaz de transmitir energía o información.

Movimiento ondulatorio

La mayor parte de la información que se recibe llega en forma de algún tipo de onda.

Ejemplos cotidianos

⇒ El sonido es energía que llega a nuestros oídos a través de **ondas mecánicas**.

⇒ La luz, energía que llega a nuestros ojos, como las señales que reciben los aparatos de radio se propagan en forma de **ondas electromagnéticas**.

Toda onda proveniente de una fuente vibrante transmite energía, pero no materia.

⇒ Al arrojar una piedra en el agua tranquila de un lago se produce una onda que se aleja del centro en círculos que se expanden, así es que la perturbación se mueve y el agua no, ya que ésta permanece allí luego de pasar la onda.

⇒ Cuando una persona conversa con otra que se encuentra en la habitación contigua, la onda de sonido se propaga a través de ésta como una perturbación en el aire. Las moléculas del aire no se mueven con la onda como se moverían con el viento.

⇒ Al agitar uno de los extremos de una cuerda extendida en la dirección horizontal, una perturbación rítmica se desplaza a lo largo de ella. Cada punto de la cuerda se mueve hacia arriba y hacia abajo mientras la perturbación se desplaza horizontalmente, sin que ocurra lo mismo con aquella.

En los ejemplos anteriores, el agua, el aire y la cuerda es el medio a través del cual se propaga la energía de la onda. Como síntesis:

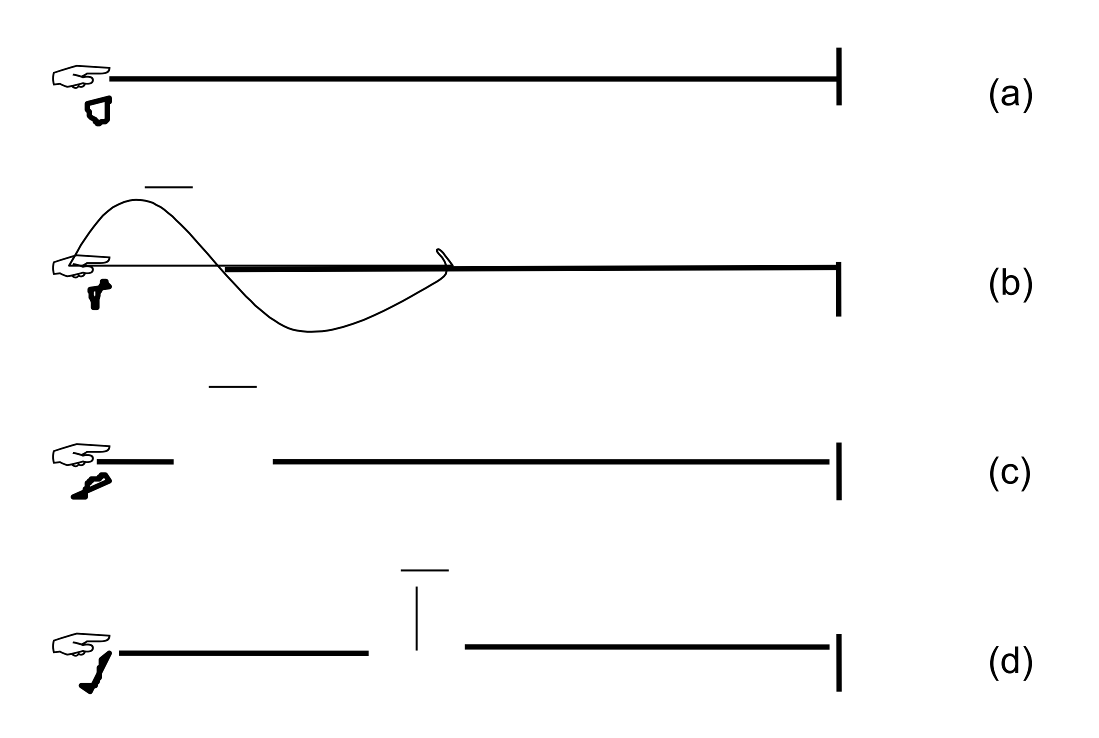
La energía que se transfiere de una fuente vibrante a un receptor es transportada por una *perturbación* en un medio, no por materia dentro del medio.

Una *onda física* es una perturbación, que una vez comenzada, se propaga por sí misma a través de un medio, moviéndose en el espacio y en el tiempo, transportando energía.

Características de las ondas

Un fenómeno de onda se identifica porque existe una magnitud física - el nivel del agua del mar o de una pileta, la presión de un gas, el color de un semáforo, la intensidad de un campo eléctrico o magnético, etc. - que varía de manera aproximadamente periódica en el espacio y en el tiempo; a partir de este efecto se puede transmitir energía o información, y es posible propagar pulsos, es decir, perturbaciones que viajan sin cambiar de forma.

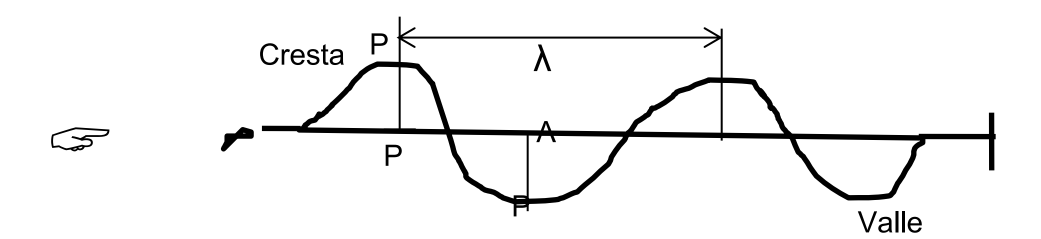
Resulta conveniente analizar la propagación de un pulso, para ello se considera una cuerda fija en uno de sus extremos y estirada horizontalmente por una persona. Si ésta mueve su mano hacia arriba e inmediatamente hacia abajo, volviendo a la posición inicial, es posible ver que una *pulsación* o *pulso* se propaga a lo largo de la cuerda a cierta velocidad (ver figura).



Propagación de un pulso a lo largo de una cuerda estirada.

Al observar un punto cualquiera de la cuerda, se nota que éste se desplaza de arriba hacia abajo reproduciendo el movimiento de la mano, mientras el pulso pasa por él (figura1 - (d)), es decir, el punto vibra y el pulso se desplaza.

Si el movimiento de la mano es continuo, se tendrá una serie de pulsos producidos alternadamente hacia arriba y hacia abajo, que se propagan a lo largo de la cuerda (ver siguiente figura). Esta serie de pulsos constituye una *onda* que se propaga en la cuerda; los puntos más altos se llaman *crestas* y los más bajos *valles*.



Las ondas están formadas de crestas y valles que se propagan por la cuerda.

Un punto cualquiera de la cuerda, al ser alcanzado por la ondulación, inicia un movimiento de vibración y oscila mientras pasa por él la onda. Por ejemplo, el punto P (figura 2) vibra dirigiéndose de P a P1, yendo luego hasta P2 y regresando a P, y así sucesivamente, mientras pasan por él las crestas y los valles.

Siendo P la posición de equilibrio, P1 y P2 posiciones extremas:

⇒ Se llama **amplitud** (A) a la distancia entre la posición de equilibrio y una posición extrema ocupada por el punto que oscila.

⇒ El tiempo que el punto P tarda en efectuar una vibración completa (P1 - P2 - P1) se llama **período** (T) del movimiento.

⇒ El número de vibraciones completas que el punto P efectúa por unidad de tiempo se llama **frecuencia** (f) del movimiento. Por ejemplo, si el punto va desde P1 a P2 y luego vuelve a P1, realizando esto 6 veces en un segundo, la frecuencia de este movimiento es:

f = 6 vibraciones / segundo o f = 6 ciclos / segundo ó 6 hertz (Hz)

⇒ La amplitud y la frecuencia de vibración de este punto P definen la amplitud y la frecuencia de la onda. Es así que la amplitud de la onda es PP1 o PP2 y la frecuencia de la onda es el número de vibraciones que realiza el punto P durante 1 segundo.

⇒ Si en una onda los puntos del medio por el cual se propaga vibran con una frecuencia f, su período T está dado por:

$$T = \frac{1}{f}$$

⇒ La distancia entre dos crestas o dos valles sucesivos se denomina **longitud de onda** (λ)

⇒ La longitud de onda se relaciona con la velocidad de propagación y con la frecuencia:

$$v = \lambda \bullet f$$

Cuestiones energéticas

⇒ ¿En qué longitud de onda transmite la estación de radio FM 100?. El nombre de esa radioemisora se debe a que transmite con una frecuencia de aproximadamente 100 megahertz.

(Las ondas de radio y las de la luz son diferentes expresiones de una misma clase de ondas: las electromagnéticas, cuya velocidad de propagación es de unos 300.000 km/s en el vacío y en el aire).

⇒ Si una onda de agua vibra dos veces por segundo y la distancia entre dos crestas sucesivas es de 1.5 m, ¿cuál es su velocidad de propagación?

⇒ Una cuerda está constituida por dos partes, una más delgada que la otra (medios distintos), explica si la frecuencia de una onda que se propaga por ella se altera o no cuando se transmite de un medio hacia otro.

Ondas de energía

Al arrojar una piedra al agua, se producen ondas que se propagan por la superficie en dirección perpendicular a la vibración, según la vertical, de las moléculas de agua. Este tipo de ondas se llaman *transversales*. Cuando una onda sonora se desplaza por el aire, las moléculas de éste vibran en la misma dirección del sonido. Este tipo de ondas se llaman *longitudinales*.

La magnitud que varía en un fenómeno ondulatorio puede ser escalar - presión, temperatura, densidad, etc. - o vectorial - desplazamiento, velocidad, campo eléctrico - ; en este último caso las ondas se pueden clasificar en transversales o longitudinales.

Ejemplos cotidianos

⇒ Las ondas electromagnéticas como las de radio, TV, la luz y las microondas, son casos de ondas transversales: sus campos eléctricos y magnéticos varían en direcciones perpendiculares a su dirección de avance.

⇒ Las ondas de compresión y descompresión del cordón espiralado del teléfono son longitudinales, ya que las perturbaciones locales tienen la misma dirección que la de propagación.

El comportamiento de la onda y sus propiedades

Las características distintivas de las ondas son su propiedad de superponerse unas con otras (interferencia) de modo que se refuerzan o se debilitan, y la de ser capaces de bordear obstáculos (difracción). Además de acuerdo al medio que se les interponga pueden reflejarse o refractarse.

La luz

La luz es una forma de energía. La energía del Sol alimenta todas las formas de vida de la Tierra. Hay otros tipos de energía que, al igual que la luz, se transmiten en forma de ondas, por ejemplo, las ondas de radio, las microondas, las ondas ultravioletas. Todas ellas son ondas electromagnéticas y en conjunto forman el espectro electromagnético. La única parte visible de éste corresponde a los colores del arco iris. Aunque su velocidad es la de la luz, cada grupo posee una longitud de onda diferente y transporta una cantidad distinta de energía. Las radiaciones infrarrojas, las microondas y las ondas de radio poseen una longitud de onda mayor a la de la luz visible y transportan menos energía; lo contrario sucede con los rayos X, los ultravioletas y los gama.

La velocidad de la luz es muy alta; al encender una lamparita, su luz ilumina la habitación casi instantáneamente. **La luz se desplaza a unos 300.000 Kilómetros por segundo**, este valor es universal, nada puede desplazarse a una velocidad mayor.

La mayor parte de los objetos que nos rodean son visibles gracias a que reflejan la luz que emiten ciertas fuentes luminosas (Sol, lamparita, etc.); algunos materiales como el agua y el vidrio permiten el paso de la luz en línea recta, otros como el papel, dejan pasar la luz pero en direcciones difusas, y en general, los materiales no dejan pasar la luz, salvo que se utilicen en capas muy delgadas. La luz también puede originarse, por ejemplo, en el interior de un vidrio y reflejarse, este fenómeno se conoce como reflexión total interna y representa el concepto que sustenta la tecnología moderna de la óptica de fibras.

Otros fenómenos ópticos interesantes lo son la **interferencia** que se observa, por ejemplo, en los torbellinos de color en las burbujas de jabón; la **difracción**, por ejemplo, se observa en la desviación de las ondas de luz en las obstrucciones que dan lugar a la formación de sombras.

Naturaleza de la luz

El estudio de la naturaleza de la luz marcó hitos en la historia de las ciencias. En el siglo V antes de Cristo los filósofos Sócrates y Platón en Grecia sostenían que la luz estaba hecha de tentáculos o filamentos que los ojos emitían y así era posible ver cuando éstos entraban en contacto con los objetos. Apoyaba esta teoría Euclides y aún en el siglo XV, el famoso filósofo y matemático francés, René Descartes, escribió un libro con una teoría semejante.

Más tarde los pitagóricos de Grecia creían que la luz viajaba de los objetos luminosos al ojo en forma de diminutas partículas, mientras otros pensadores de la época afirmaban que la luz se propagaba en forma de ondas. Y el tiempo siguió avanzando, Issac Newton (1642-1727) defendió una teoría corpuscular (la luz formada por microscópicas partículas) que fue de gran aceptación en el mundo científico, ya que a nivel experimental se comprobaba que en apariencias la luz se movía en línea recta y no se extendía hacia los costados como las ondas. Sin embargo, un contemporáneo de Newton, el científico holandés Christian Huygens (1629 - 1695), afirmaba que la luz era una onda (en ciertas condiciones la luz se extendía hacia los costados —fenómeno de difracción—).

El físico alemán Max Planck (1858 - 1947) fue el primero en enunciar que la luz no se comporta ni como una onda ni como una partícula, sino que combina propiedades de ambas, una teoría que después desarrolló Albert Eistein. Para explicar la reflexión, la refracción y la difracción de la luz, hay que imaginarla como análoga a una onda sonora, con una frecuencia y una longitud de onda. Pero para explicar la emisión y absorción de la luz por un átomo, hay que imaginarla como un flujo de partículas (fotones), cada una de las cuales transporta una cierta cantidad de energía.

En 1905, Einstein publicó una teoría (efecto fotoeléctrico) que explicaba que la luz está hecha de pequeñas partículas (fotones) que son paquetes de energía electromagnética sin masa. Por esta teoría es que recibió el Premio Nobel y no por la Teoría de la Relatividad.

Fuentes luminosas

Todos los objetos emiten ondas electromagnéticas que suelen ser invisibles porque su frecuencia es menor que la de la luz visible. Pero cuando un objeto se calienta, la frecuencia de la radiación aumenta y se produce luz visible; hacia los 500ºC aparece un brillo rojo que se convierte

en naranja a los 2.000 ºC y que es casi blanco, con emisión de todos los colores del espectro visible, al alcanzar la incandescencia a 5.000ºC. Pero no sólo los objetos calientes producen luz, una corriente eléctrica, al pasar a través de un gas, excita los electrones y éstos desprenden su energía adicional en forma de luz; algunas sustancias químicas también desprenden luz.

En todas las fuentes luminosas, se obtiene energía luminosa por transformación de otra clase de energía, por ejemplo, en una lámpara eléctrica de incandescencia, la luz es consecuencia de la energía eléctrica suministrada.

No toda la energía primitiva se transforma en luminosa, parte se transforma en calor (la lámpara se calienta), otra parte es radiante y de ésta última, una parte es en las longitudes de onda entre 350 y 760 nm.

El flujo radiante y el **flujo luminoso** es la energía, radiante o luminosa, emitida por la fuente en una unidad de tiempo. Cabe señalar que el flujo luminoso no se distribuye por igual en todas direcciones del espacio, sino que depende del dispositivo empleado para la iluminación.

La **iluminación** (E) de una superficie es la relación entre el flujo luminoso que recibe y la extensión de la misma. La iluminación media de una superficie S es la relación entre el flujo total recibido ϕ y la extensión de dicha superficie:

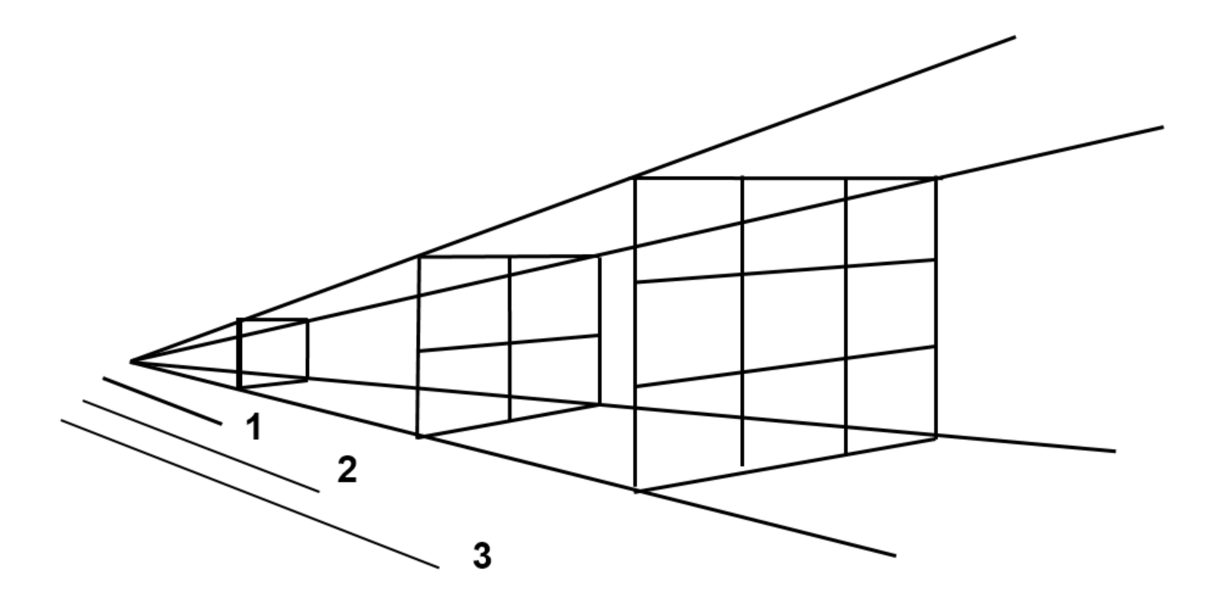
$$Em = \phi / S$$

Se considera interesante mencionar algunas unidades de medida de las magnitudes mencionadas anteriormente en el S.I.:

intensidad luminosa (I) = candela (cd)
flujo luminoso (ϕ) = lumen (lum)
iluminación (E) = Lux (lux)

Para poder comparar las unidades patrón con magnitudes fotométricas es necesario disponer de algún método de comparación, el más usado es la Ley de los cuadrados:

Si un haz de luz cuyo flujo es de 1 lumen se proyecta sobre una superficie de 1 metro cuadrado producirá una iluminación de 1 lux.



Si se aleja la superficie al doble de distancia, el haz de luz incidirá sobre una superficie de 4 metros cuadrados, lo que significa que la iluminación será de ¼ lux. Si se lleva a una distancia triple, la superficie iluminada será de 1/9 lux, etc.

La Ley de los cuadrados se enuncia:

La iluminación de una superficie es directamente proporcional a la intensidad de la fuente luminosa e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

El ojo, debido a su gran capacidad de adaptación a diferentes intensidades no es muy capaz de apreciar el valor absoluto de una iluminación, pero en cambio puede percibir cual de dos superficies está más iluminada.

Propiedades de una onda luminosa

Cuando la luz viaja en el espacio vacío o a través de materiales homogéneos y transparentes, se la puede considerar como un conjunto de rayos que se propagan en línea recta. Pero cuando pasa cerca del borde de un obstáculo o atraviesa un orificio pequeño, la luz se propaga en forma de onda.

Un pavimento de alquitrán desprende bajo el Sol una considerable cantidad de calor. Al ser oscuro, el alquitrán absorbe la energía de la luz que recibe y su temperatura va aumentando. Las superficies negras absorben la luz, mientras que las blancas las reflejan y se calientan más lentamente por la acción del Sol.

Además de ser absorbida o reflejada, la luz también se transmite y atraviesa sustancias transparentes como el vidrio. El aspecto de un objeto tiene que ver con la forma en que absorbe, refleja o transmite luz.

La mayoría de los materiales absorben luz sin reemitirla (cuerpos opacos), impidiendo así su paso, por ejemplo, la madera, las piedras y las personas.

Cuando un objeto opaco se interpone en el camino de la luz, se produce una zona de oscurecimiento (falta de luz) llamada **sombra**; cuando llega sólo parte de luz, se denomina **penumbra**.

Ejemplos cotidianos

⇒ **Cristal Fotocromático**: Los cristales fotocromáticos para anteojos se oscurecen al estar expuestos a la luz solar intensa, esto se debe a que la energía luminosa altera la estructura de algunas moléculas del cristal y les hace absorber más luz; en caso contrario, el cristal es casi transparente.

⇒ Las **sustancias** de uso cotidiano reaccionan a la luz de diferente manera. Las **transparentes** transmiten casi toda la luz que reciben; las **traslúcidas** también, pero se dispersa en su interior debido a la interacción de las partículas que la componen; las **opacas** no transmiten la luz, sino que las reflejan o absorben.

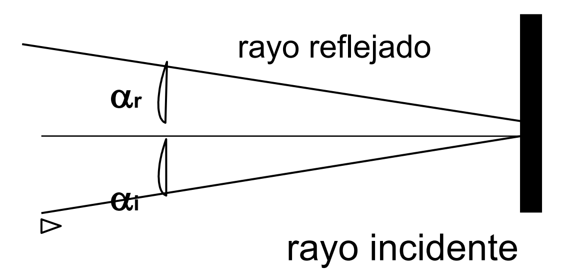
⇒ **Fluorescencia**: Algunas sustancias químicas absorben la luz ultravioleta, liberando luego la energía correspondiente en forma de luz visible. Se aplica en la fabricación de ropas, pinturas, maquillajes, etc.; en la fabricación de jabón en polvo se añaden sustancias fluorescentes a los detergentes para que la ropa blanca lo parezca más al sol.

⇒ Las **ondas de luz son transversales**, es decir, vibran perpendicularmente a su dirección de propagación. En base a esta propiedad, se fabrican, por ejemplo, cristales **polarizados** para anteojos, autos, etc., que sólo transmiten la luz que vibra verticalmente.

⇒ La Tierra se interpone a veces entre el Sol y la Luna, produciéndose así el eclipse de Luna. Cuando esto sucede, la sombra de la Tierra se mueve sobre la superficie lunar; en el centro del eclipse, la Luna queda oculta durante más de una hora.

Reflexión - Refracción - Difusión

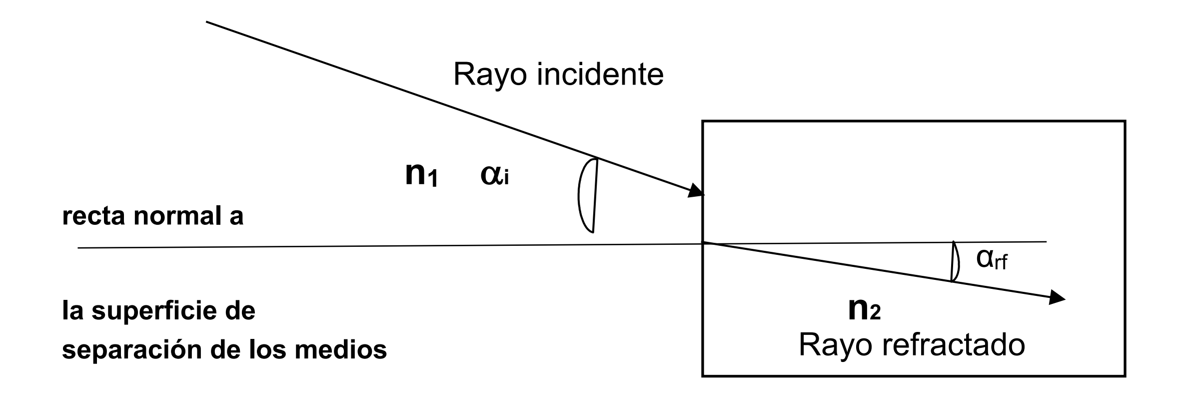
1. Algunos astros como el Sol son visibles porque poseen luz propia, pero los objetos que no emiten luz la reflejan; por ello, su apariencia depende de la cantidad de luz que reflejan como así también de la textura de su superficie. Cuando un rayo luminoso llega hasta un espejo, se **refleja**, como lo hace una pelota de goma contra una pared:



En este fenómeno, los ángulos de incidencia y de reflexión cumplen la siguiente relación:

Ley de Snell $\alpha_i = \alpha_r$

2. Cuando un rayo de luz incide sobre una superficie que separa dos medios distintos, parte se refleja y parte se **refracta**, es decir, la atraviesa modificando su dirección y esto se debe a que la luz se propaga con distinta velocidad en medios diferentes:



En este fenómeno, los ángulos de incidencia y de refracción cumplen la siguiente relación:

$$n_1 \bullet \text{sen}\alpha_i = n_2 \bullet \text{sen}\alpha_{rf}$$ Ley de Snell

Donde n1 y n2 son los **índices de refracción** de cada medio (índice de refracción - n - de una sustancia, magnitud que relaciona la velocidad de la luz en el vacío - c - y la velocidad de la luz en dicha sustancia - v - : n = c/v)

3. Cuando la luz incide sobre una superficie irregular, cada porción saliente de la misma refleja la luz en determinada dirección y en consecuencia el haz reflejado no queda bien definido y

se observa el esparcimiento o **difusión** de la luz en todas direcciones (reflexión difusa). Así, una persona, una pared, una hoja de papel son objetos que difunden la luz que reciben esparciéndola en todas direcciones. Cuando esta luz penetra en nuestros ojos percibimos la imagen del objeto, si no difundiera no podríamos verlo; por el mismo motivo, varias personas pueden ver el mismo objeto a pesar de estar situadas en posiciones distintas.

Color

El color de la mayoría de los objetos que nos rodean se debe a la forma en que reflejan la luz que sobre ellos incide. Nuestros ojos perciben las diferentes longitudes de onda de la luz visible o combinaciones de ellas como colores distintos; así, la luz roja corresponde a la mayor longitud de onda que podemos percibir, las más cortas el azul y el violeta, y si se mezclan todas las longitudes de onda de la luz en cantidades iguales, el resultado es la luz blanca. Lo dicho explica, por ejemplo, porque a una hoja la vemos verde al incidir sobre ella luz solar (el Sol es un ejemplo de luz blanca), es que absorbe todos los colores de la luz solar menos el verde, al que refleja.

Cuestiones energéticas

⇒ Te podés broncear al Sol en días despejados como en días nublados, pero ¿por qué no te podés broncear si te ponés detrás de un vidrio?

⇒ Un rayo de luz incide perpendicularmente sobre un espejo y se refleja, si se gira el espejo 10º ¿en qué ángulo se desviará el rayo reflejado respecto del rayo incidente?

⇒ Un rayo de luz incide desde el aire sobre la superficie de un lago con un ángulo de 45º, ¿qué ángulo forma con la vertical el rayo refractado?

⇒ ¿De qué color se ve un objeto blanco iluminado con dos reflectores, uno que da luz roja y otra que da luz verde?

⇒ ¿Por qué se calientan más las hojas que los pétalos de una rosa roja cuando la iluminamos con luz roja?; ¿sucede lo mismo si la iluminamos con luz verde?

Hidrostática

Descripción general de los fluidos

Los objetos de nuestro entorno inmediato los encontramos en estado sólido, en estado líquido o como gases. Los sólidos se caracterizan por poseer una forma y un volumen propio y estable; los líquidos, en cambio, si bien poseen un volumen definido, se depositan en el fondo de los recipientes, adaptándose a la forma de estos; y los gases no poseen ni forma ni volumen propio, ocupando todo el espacio que tienen disponible.

Esta definición, si bien es útil para muchos casos, con frecuencia resulta un tanto vaga. Esto se advierte cuando nos preguntamos, ¿en qué estado se encuentra la jalea de un postre? o ¿en qué estado nos encontramos nosotros? o ¿en qué estado se encuentra el aire de la atmósfera considerada globalmente?

Por otra parte, si preguntamos en qué estado se encuentra el vidrio de una ventana o de un vaso, la respuesta será unánime: sólido. Sin embargo, se ha observado que en los ventanales de antiguas catedrales los vidrios son más gruesos abajo que arriba; es decir, lentamente se están derramando. Así, incluso algo que nos parece muy sólido podría corresponder, como en este caso, a un líquido altamente viscoso. Las definiciones, aunque útiles, no siempre se prestan para ser seguidas a ciegas.

Los objetos que mejor se comportan como un sólido son los cristales de diamante, pero incluso éstos pueden ser alterados. En definitiva, los conceptos de sólido, líquido y gas son un tanto relativos y dependen de las circunstancias en que se encuentre la materia. Nosotros consideraremos el vidrio de una ventana o la madera de la cubierta de una mesa como sólidos por cuanto durante el tiempo en que los podemos considerar, para el análisis de una situación o un experimento, conservan prácticamente inalterada su forma.

El que un material se encuentre en alguno de estos estados depende principalmente de la temperatura que tenga y ello se debe a las fuerzas de cohesión entre átomos y entre moléculas. Los sólidos, átomos y moléculas vibran entre posiciones bien definidas, ya que las fuerzas de cohesión entre ellos son muy grandes. En los líquidos, las moléculas están un poco más separadas, de modo que presentan cierta libertad de movimiento. En los gases, en cambio, las moléculas están a distancias tan grandes unas de otras que las fuerzas de cohesión prácticamente no existen. En algunos casos (gases ideales), incluso se pueden despreciar.

En esta unidad nos preocuparemos de comprender el comportamiento de los fluidos, término genérico que incluye a líquidos y gases; es decir, materiales en que átomos y moléculas pueden moverse con cierta facilidad unos respecto de otros. Al estudio de un fluido que está en reposo (agua quieta en un vaso, aire cuando no hay viento, etc.) se denomina hidrostática, y cuando se estudia un fluido que está en movimiento o algo que se mueve en éste (agua corriendo por un río o saliendo de una cañería, avión en vuelo, etc.) se habla de hidrodinámica.

Toda porción de materia posee una masa m y, bajo ciertas condiciones, un volumen V que permiten definir la densidad D. Esta importante cantidad la calculamos según:

$$D = \frac{m}{V}$$

La densidad tiene unidades de [masa/volumen] y en el SI debe ser: $Kg./m^3$ También se suele usar el $g./m^3$.

Como 1 kg = 1.000 g y 1 m = 100 cm, se tiene que: 1 $Kg./m^3$ = 1.000 $g./m^3$

Presión

Cuando se ejerce una fuerza sobre un cuerpo deformable, los efectos que provoca dependen no sólo de su intensidad, sino también de cómo esté repartida sobre la superficie del cuerpo. Así, un golpe de martillo sobre un clavo bien afilado hace que penetre más en la pared de lo que lo haría otro clavo sin punta que recibiera el mismo impacto. Un individuo situado en puntas de pie sobre una capa de nieve blanda se hunde, en tanto que otro de igual peso que calce raquetas, al repartir la fuerza sobre una mayor superficie, puede caminar sin dificultad. Estos razonamientos nos llevan a definir a una nueva magnitud: la presión. Es una magnitud escalar definida como el cociente entre la intensidad “F” de la fuerza aplicada perpendicularmente sobre una superficie dada y el área “S” de dicha superficie:

$$P = \frac{F}{S}$$

En el sistema internacional (SI), la presión se expresa en $\frac{N}{m^2} = Pa$ (Pascal)

Sin embargo, las unidades más utilizadas en los líquidos son las del sistema práctico, en particular: $\frac{\vec{g}}{cm^2}$; $\frac{\vec{kg}}{cm^2}$; $\frac{\vec{kg}}{m^2}$ y mca (metros de columna de agua)

Y en los gases: mmHg (milímetros de mercurio), atm. (atmósfera) y PSI (libra/pulgada^2)

Las equivalencias entre estas unidades son:

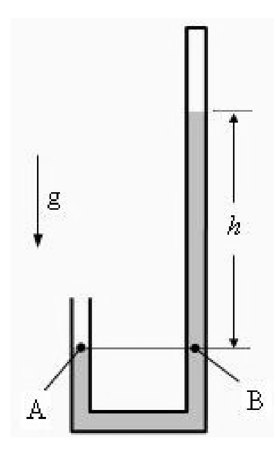
1 atm = 760 mmHg = 76 cm x 13,6 $\frac{\vec{g}}{cm^3}$=1033,6 $\frac{\vec{g}}{cm^2}$=1,033 $\frac{\vec{kg}}{m^2}$=10,33 mca = 14,7 *PSI*.

Presión atmosférica

¿Pesará el aire? Para responder a esta pregunta podría pensarse en realizar la medición de un globo. Compara el “peso” de un globo cuando está desinflado con el peso que tiene cuando está inflado. La diferencia correspondería a la masa del aire atrapado en el interior del globo inflado. Como verás más adelante, independientemente de la precisión del instrumento que se emplee, este método es profundamente erróneo. Si bien no proporciona la masa del aire del interior del globo, permite convencerse de que la pregunta sí tiene sentido y de que la respuesta es positiva.

¿Existe el vacío?, ¿cómo puede producirse? La historia de este problema está también estrechamente relacionada con el concepto de presión. Aristóteles afirmaba que el vacío era imposible, que la naturaleza le tendría “terror al vacío” y que cualquier intento por producirlo estaría condenado al fracaso. Esta idea, como tantas otras de este pensador, no se puso en duda por más de diez siglos. El experimento más importante lo realizó un discípulo de Galileo Galilei, el italiano Evangelista Torricelli (1608-1647). Procedió a llenar con mercurio un tubo de vidrio del orden de 1 metro de longitud y luego lo invirtió, abriendo su extremo en un recipiente que también contenía mercurio. Grande fue su sorpresa al constatar que parte del mercurio se derramaba en el recipiente, quedando dentro del tubo una columna de mercurio de unos 76cm de longitud. Fue una sorpresa pues esperaba que ocurriera lo mismo que con otros líquidos, esto es, que el mercurio permaneciera dentro del tubo sin derramarse.

Torricelli comprobó después que la altura de esta columna de mercurio resultaba igual aun cuando el largo del tubo, su diámetro y forma fueran muy diferentes. ¿Qué otra cosa aparte de vacío podía quedar en la parte superior del tubo? Si intentas realizar este tipo de experimentos, debes tener mucho cuidado, pues si bien el mercurio es muy hermoso, es altamente tóxico, por lo que resulta absolutamente necesario trabajar en un lugar bien ventilado. Si haces el experimento con agua en vez de mercurio, verás que no se derrama en el recipiente y el tubo queda lleno de agua. La explicación de estos comportamientos no fue cosa simple. Torricelli sostuvo que la columna de mercurio era sostenida por la presión atmosférica. Si se examina el esquema de la siguiente figura y aplicamos lo que aprendimos para el caso de los vasos comunicantes, podremos entender mejor a Torricelli. En efecto, la presión que ejerce la columna de mercurio de altura h en el punto B debe ser igual a la que existe en el punto A; pero el tubo aquí está abierto y en contacto con el aire; por lo tanto, este aire atmosférico debe ser el responsable de esta presión.



La presión atmosférica puede ser calculada entonces con la expresión:

$P_{atmósfera} = D_{Hg} \cdot g \cdot h_{Hg}$

Como D_{Hg}, la densidad del mercurio es 13.600 kg/m^3, h_{Hg} = 0,76 m y g = 10 m/s^2, encontramos que:

$P_{atmósfera}$ = 103.360,0 Pascal

(Si empleamos valores más exactos, se encuentra que la presión atmosférica a nivel del mar es en promedio 101.325,0 Pascal)

Si quisiéramos calcular la presión total en el fondo de un lago, a la presión del agua debiéramos sumarle la presión atmosférica. El instrumento construido por Torricelli es lo que conocemos como *barómetro*.

Fue a Blas Pascal a quien se le ocurrió un experimento que probaría que esta presión se debe efectivamente a la atmósfera. La idea consistía en ascender una montaña con un barómetro e ir midiendo, a medida que se asciende, la altura de la columna de mercurio. Al existir cada vez menos aire encima del barómetro, la presión ejercida por él debía ser menor y en consecuencia la altura de la columna de mercurio debía reducirse. El experimento fue realizado con éxito en el monte Puy-de-Dôme, sin la participación de Pascal, debido a que su precaria salud no se lo permitía. Se encontró que, por cada 10,5 m de ascenso, la altura de la columna de mercurio se reducía en 1 mm, por lo que este instrumento sirve también como *altímetro*.

Por otra parte, es interesante comprender que la altura de la columna de mercurio no todos los días y a toda hora es la misma. En efecto, se observan variaciones pequeñas que están relacionadas con el estado del clima.

Otras unidades de presión

Las observaciones de Torricelli hacen de gran utilidad otras unidades de medición distintas al pascal. Entre las principales encontramos el "cm de Hg" y el "mm de Hg", también denominado "torricelli" y abreviado como "torr". Estas unidades corresponden a la presión

ejercida en la base de una columna de mercurio de 1 cm y 1 mm, respectivamente. Otra unidad es la “atmósfera”, abreviada como “atm” y que corresponde a la presión ejercida, en su base, por una columna de mercurio de 76 cm de altura. No debe confundirse la unidad atm con la presión que ejerce la atmósfera en un momento dado. Son por lo general valores cercanos, pero los significados son distintos. Otras unidades usadas en meteorología son el “bar” y el “milibar”.

1 bar = 10^5 Pascal

Por último, otra unidad frecuentemente usada es la libra/pulgada^2 (lb/in^2), que equivale a 6.895 Pascal.

¿Por qué el experimento de Torricelli no resulta si se hace con agua? En realidad, sí resulta, pero el problema es que el tubo de vidrio debiera tener más de 10 m de longitud. Más exactamente, debiera ser al menos 13,6 veces más largo que los 76 cm que se requieren al hacerlo con el mercurio.

El principio de Arquímedes

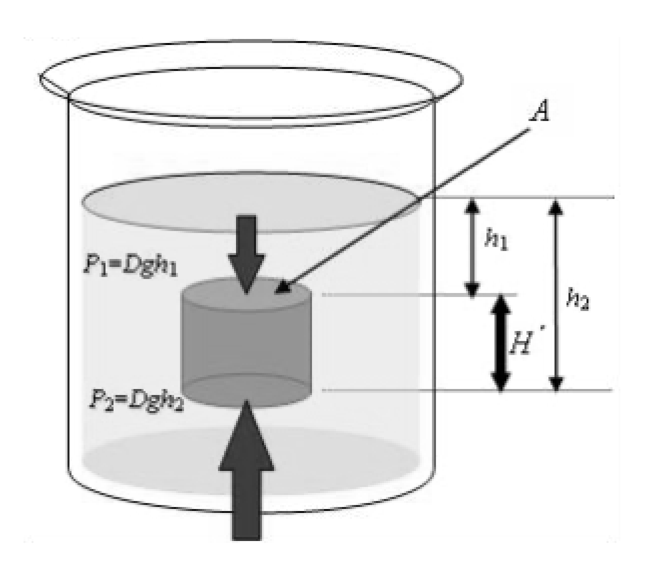
¿Cómo hacen los submarinos y los peces para permanecer quietos a cierta profundidad, sumergirse y emerger? ¿Por qué para los pájaros esto es imposible sin aletear? ¿Cómo funcionan los chalecos salvavidas? ¿Por qué flotan los témpanos de hielo? ¿Por qué las burbujas de aire en el agua, o de gas en las bebidas, siempre ascienden?

Si colocamos sobre agua distintos objetos: madera, plástico, papel, clavos, cubos de hielo, un barquito de papel, etc., veremos que algunos flotan y otros se hunden. Pero esto no depende únicamente del material, también depende de la forma que éste tenga. Si con un mismo trozo de plastilina construyes una bola y un disco ahuecado, verás que el primero se hunde mientras que el segundo flota. Por la misma razón un clavo de hierro se hunde y un barco, del mismo material, flota. Todas estas preguntas y los hechos señalados encuentran su explicación en el principio de Arquímedes. Este célebre principio se puede formular del siguiente modo: *Sobre un cuerpo sumergido en un líquido actúa una fuerza, de abajo hacia arriba (el empuje), que es igual al peso del líquido desalojado.*

Nadie sabe cómo Arquímedes llegó a esta conclusión, pero se conoce bien la leyenda según la cual el rey Herón de Siracusa encargó al genio averiguar si la corona de oro que le había hecho un orfebre contenía todo el oro que le habían entregado para su fabricación. Según se dice, hizo el descubrimiento cuando se estaba bañando, y tan contento se puso que salió desnudo y con la corona en sus manos gritando por las calles de su ciudad “¡Eureka! ¡Eureka!”, en señal de que había hallado la solución al problema.

Para comprender que el principio de Arquímedes es una consecuencia de la presión hidrostática, sigamos el siguiente análisis ayudados por la figura. Allí se muestra un líquido de densidad D y sumergido en él un cuerpo cilíndrico de altura H y área A en su parte superior e inferior. Según la expresión vista, en la superficie superior la presión es $P_1 = Dgh_1$, donde h_1 es

la profundidad a que se encuentra dicha superficie. Igualmente, en la superficie inferior es $P_2 = Dgh_2$. Arriba la fuerza producida por la presión actúa hacia abajo y la de abajo actúa hacia arriba, siendo mayor esta última dado que $h_2 > h_1$.



Los valores de estas dos fuerzas deben ser $F_1 = P_1xA$ y $F_2 = P_2xA$, respectivamente, con lo cual la fuerza total resultante a la presión que aplica el fluido, ya que las fuerzas laterales se anulan, es:

$F = F_2 – F_1$;

es decir,

$F = (P_2 – P_1)A$,

o bien,

$F = (Dgh_2 – Dgh_1)A$;

lo que se puede escribir como:

$F = Dg(h_2 – h_1)A = DgHA$;

Pero como el volumen del cilindro, y también el del líquido desalojado, es $V = HA$, encontramos que la fuerza que actúa hacia arriba y corresponde al empuje E es:

$E = DgV$

Como la masa del líquido desalojado es,

$m = DV$,

el empuje corresponde a

$E = mg$,

que es el peso del líquido desalojado. Este resultado general nos indica que no hay dependencia de la forma del cuerpo que esté sumergido.

La capilaridad y la tensión superficial

Al introducir diferentes objetos en agua u otros líquidos, se observa que las zonas en que dichos objetos están en contacto con la superficie de tales líquidos adoptan curvaturas especiales, que llamaremos *meniscos*. Si el objeto es un tubo capilar, inferior a unos 4 mm de diámetro interior, observarás que el nivel que alcanza el líquido dentro y fuera del tubo es diferente. También podrás constatar que algunos líquidos mojan de manera diferente los objetos; pero en algunos casos los líquidos no mojan en lo absoluto a los objetos, como es el caso del mercurio y el vidrio.

Si bien estos efectos son pequeños y en la vida diaria suelen pasar desapercibidos, son de gran importancia y en muchos casos resultan de gran utilidad práctica. Estos fenómenos ocurren debido a que las moléculas de los distintos materiales interactúan eléctricamente con las moléculas de los líquidos y fluidos en general. Cuando el líquido moja al objeto, estas fuerzas son atractivas, y cuando no los mojan, repulsivas. Por otra parte, en las superficies de los líquidos estos átomos y moléculas se atraen entre sí más fuertemente que en otros lugares, produciendo lo que se denomina *tensión superficial*. El que los líquidos puedan ascender por delgados tubos se denomina *capilaridad*.

Bibliografía

LOPEZ CARLOS - GONZALVO CARLOS. (2008) Apunte de Cátedra. Taller Vertical II de matemática.

TIPPENS, P. E. (2009). FISICA: CONCEPTOS Y APLICACIONES: INCLUYE MANUAL DE LABORATORIO (1a. ed., 3a. reimp.). BOGOTA: MCGRAW-HILL INTERAMERICANA.

Apuntes de Clase, Física Parte I y II, Cátedra de Matemática 4, Arrarás-Marañón Di Leo, Facultad de Arquitectura y Urbanismo, 2016.

Los autores

Arrarás, Stella Maris

Ingeniero en Construcciones, Facultad de Ingeniería (FI), Universidad Nacional de La Plata (UNLP). Ingeniera Civil (FI, UNLP). Capacitación Docente. Actualmente es profesora titular ordinaria en la cátedra 4 de Matemática, en FAU, UNLP. Profesora asociada ordinaria en Unidad Pedagógica de Matemática y Elementos de Matemática, en FCNyM, UNLP. Profesora titular ordinaria en Análisis Matemática 1, UTN, FRLP. Profesora adjunta ordinaria en Álgebra y Geometría Analítica, en UTN, FRLP. Trabajó en el nivel terciario de la DGCyE, Buenos Aires. Trabajó en el nivel secundario en el Colegio Sagrado Corazón de Jesús de La Plata. Trabajó en la Dirección de Obras y Proyectos de la MLP. Integrante de comisiones asesoras de concursos de auxiliares docentes y profesores en UTN, FRLP y UNLP. Participó de congresos nacionales e internacionales de enseñanza de la matemática. Es autora de varios apuntes de cátedra de la UNLP y UTN, FRLP.

Cappello, Viviana

Ingeniera en Sistemas de Información (UTN, FRLP). Analista Universitario en Sistemas (UTN, FRLP). Cursó el profesorado de Matemática (FaHCE, UNLP). Cursó la Carrera Docente Universitaria (UNLP). Maestría en Tecnología Informática Aplicada en Educación (Facultad de Informática, UNLP). Magister en Tecnología Educativa (UAM, España). Actualmente es profesora adjunta ordinaria en la Unidad Pedagógica de Matemática y Elementos de Matemática (FCNyM, UNLP). JTP ordinaria de la FAU, UNLP. Profesora asociada ordinaria de Álgebra y Geometría Analítica (UTN, FRLP). Directora del Laboratorio de MatemáTICa (UTN, FRLP). Secretaria del Departamento de Ciencias Básicas (FRLP, UTN). Publicó dos libros (Edulp) y participó de congresos nacionales e internacionales de enseñanza de la matemática y de proyectos de extensión de la UNLP. Mantiene y administra la web de cátedra de tres facultades y otras instituciones educativas.

Giulietti, Marcelo

Profesor de Matemática (Instituto Superior del Profesorado J.N. Terrero, La Plata). Licenciado en Enseñanza de la Matemática (Universidad CAECE, Ciudad Autónoma de Buenos Aires). Cursó el Magister en Educación en Ciencias Exactas y Naturales (FaHCE, UNLP). Actualmente se desempeña como ayudante diplomada ordinaria de la Unidad Pedagógica de

Matemática y Elementos de Matemática (FCNyM, UNLP). Ayudante diplomado del Taller Vertical Nº 4 (Facultad de Arquitectura y Urbanismo, UNLP). Se capacitó en Entornos *Moodle* como Tutor y Creador de Aulas Virtuales. Dictó capacitaciones para tutores y profesores en entornos virtuales bajo la plataforma *Moodle*. Fue Secretario Académico en el Instituto Superior de Formación Técnica Nº 6011, La Plata.

Marañón Di Leo, Julio

Ingeniero Aeronáutico (FI, UNLP). Doctor en Ingeniería (FI, UNLP). Actualmente se desempeña como profesor titular ordinario (FI, UNLP) y como profesor adjunto de la Cátedra Nº4 de Matemática (Facultad de Arquitectura y Urbanismo, UNLP). Es investigador adjunto del Conicet; director de la carrera de Ingeniería Aeronáutica y coordinador del grupo de trabajo de investigación y transferencia UIDET, LaCLyFA (FI, UNLP). Fue consejero académico, UNLP y becario de iniciación y perfeccionamiento en CIC. Dictó cursos de posgrado en la Facultad de Ingeniería y la Facultad de Arquitectura y Urbanismo (UNLP). Director y codirector de proyectos de investigación del Conicet, UNLP y la Agencia de Promoción Científica y Tecnológica. Director y codirector de becarios de doctorado del Conicet, UNLP y CIC. Fue director de trabajos finales de la carrera de Ingeniería Aeronáutica. Es autor y coautor de publicaciones científicas y técnicas y de presentaciones en congresos de carácter nacional e internacional.

Trifilio, Mariano Matías

Analista en Computación, Analista en Sistemas y Licenciado en Análisis de Sistemas (Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Católica de La Plata). Profesor en Matemática (Instituto Superior del Profesorado J. N. Terrero). Licenciado en Enseñanza de la Matemática (Universidad CAECE). Actualmente se desempeña como ayudante diplomado ordinario en la Unidad Pedagógica de Matemática y Elementos de Matemática (FCNyM, UNLP). Ayudante diplomado ordinario de la Cátedra IV en Elementos de matemática y física (FAU, UNLP). Profesor adjunto ordinario de Álgebra y Geometría Analítica (UTN, FRLP). Profesor titular de Análisis Matemático II (Instituto J. N. Terrero). Director del Seminario Universitario de Ingreso (UTN, FRLP).

Libros de Cátedra

Matemática en arquitectura : parte 1 : un aporte para la formación en matemática de los estudiantes de la carrera de Arquitectura / Stella Maris Arraras ... [et al.] ; coordinación general de Stella Maris Arraras ; Julio Marañón Di Leo ; Viviana Beatriz Cappello. - 1a ed . - La Plata : EDULP, 2020.
Libro digital, PDF - (Libros de cátedra)

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-987-8348-24-7

1. Matemática. 2. Física. 3. Arquitectura . I. Arraras, Stella Maris, coord. II. Marañón Di Leo, Julio, coord. III. Cappello, Viviana Beatriz, coord.
CDD 510.7

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata
48 N.º 551-599 / La Plata B1900AMX / Buenos Aires, Argentina
+54 221 644 7150
edulp.editorial@gmail.com
www.editorial.unlp.edu.ar

Edulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2020
ISBN 978-987-8348-24-7





